Fermi-Probleme als Beitrag zu einer neuen Aufgabenkultur[1]

Rainer Müller
Universität München

1. Aufgabenkultur im Physikunterricht

Die Aufgabenkultur an deutschen Schulen ist ein Thema, das in der Folge der TIMS-Studie die Besorgnis von Lehrern, Fachdidaktikern und Politikern auf sich gezogen hat. Auf der Suche nach den Gründen für das mittelmäßigen Abschneiden der deutschen Schüler im internationalen Vergleich wurde als eine der Ursachen eine Leistungsschwäche der deutschen Schüler beim Lösen von Aufgaben identifiziert. In der Folge wurde das Stichwort vom „Mangel an Aufgabenkultur" geprägt und nach Möglichkeiten gesucht, wie man dem Problem begegnen könne. Belege für die Aufmerksamkeit, die das Thema auf sich gezogen hat, sind z. B. die BLK-Expertise zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts [1, s. auch 2], die entsprechenden Passagen in den Empfehlungen „Physikunterricht und moderne Bildung" der MNU [3] und das dem Thema „Aufgabenkultur" gewidmete Heft dieser Zeitschrift [4].

Die BLK-Expertise konstatiert, dass „in der Weiterentwicklung von Aufgabenstellungen und der Form ihrer Bearbeitung [...] ein beträchtliches Potential zur Verbesserung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" liegt. Worin liegt nun dieses Potential, oder, anders gefragt, was ist an der gegenwärtigen Situation zu bemängeln? Häußler und Lind stellen fest: „Es bislang keine ausgearbeitete Didaktik des Aufgabenlösens im Physikunterricht und dementsprechend zeugt die Unterrichtspraxis oft von einer gewissen Phantasielosigkeit [...] So kommt es dann zu den „Einsetzaufgaben", mit denen man außer dem Umstellen von Gleichungen nicht mehr viel lernen kann" [5]. Ähnlich heißt es in den MNU-Empfehlungen, dass die „Leistungsschwäche der deutschen Schüler beim Lösen von Aufgaben sichtbar wird, die eine sinnvolle Anwendung und Übertragung des Gelernten auf eine neue fachliche oder fachübergreifende Problemstellung verlangt. Insbesondere sind anspruchsvolle Aufgaben, die den behandelten Stoff auf lebenspraktische Situationen beziehen, sowie Aufgaben, die unterschiedliche Lösungswege erlauben, für die meisten Schüler unlösbar. Ursachen für diese Leistungsschwäche der Schüler sind in der Unterrichtsführung und im Einsatz von Aufgaben zu suchen. Vorrangig werden im Physikunterricht Routineaufgaben eingesetzt und neu eingeführte Unterrichtsinhalte eingeübt" [3].

Welche Maßnahmen kann man zur Verbesserung der Aufgabenkultur ergreifen? Einig ist man sich, dass die verbreitete Praxis durchbrochen werden muss Aufgaben nur zur „Erarbeitung *einer* Lösung, [der] Beherrschung eines Algorithmus oder die Automatisierung einer Routine" einzusetzen [1, S. 89]. In der BLK-Expertise [1] werden die folgenden Vorschläge unterbreitet (s. auch [2]):

- Aufgabentypen entwickeln, die mehrere Vorgehensweise und unterschiedliche Lösungswege zulassen.
- Abwechslungsreiche Anwendungsaufgaben in variierenden Kontexten anbieten.
- Auch länger zurückliegende Stoffinhalte in den Unterricht integrieren (vertikale Vernetzung).

Unter einer etwas allgemeineren Perspektive schreiben Häußler und Lind: „Es geht [...] darum, dem Schüler die Physik als ein flexibel einsetzbares Werkzeug zu vermitteln; der Anwendung und dem Umgang mit dem Wissen einen größeren Stellenwert einzuräumen, gegen-

---

[1] Erscheint in: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 8/2001.

über der Einführung und Herleitung; Verständnis eher an der Fähigkeit zu messen, etwas mit dem Wissen anzufangen, als an der Fähigkeit, es korrekt wiederzugeben“ [5].

Im folgenden soll gezeigt werden, dass vor dem Hintergrund der genannten Probleme die sogenannten Fermiprobleme eine attraktive Ergänzung zu den herkömmlichen Aufgabentypen darstellen. Bei ihnen werden die oben aufgeführten Maßnahmen zur Verbesserung der Aufgabenkultur allein schon durch die Art der Vorgehensweise auf natürliche Weise umgesetzt. Bevor wir dies an einem Beispiel diskutieren, soll zuerst erläutert werden, worum es sich bei Fermiproblemen überhaupt handelt.

2. Fermiprobleme

Benannt sind die Fermiprobleme nach Enrico Fermi (1901-1954; Abb. 1), der für seine unkonventionelle Weise bekannt war, auf einfache und schnelle Art größenordnungsmäßige Abschätzungen physikalischer Größen vornehmen zu können. Robert Jungk [6] überliefert etwa eine Anekdote vom ersten Test der Atombombe, bei dem Fermi die Sprengkraft der Bombe dadurch abschätzte, dass er ein paar Grashalme in den durch die Detonation ausgelösten Wind streute und beobachtete, wie weit sie abgetrieben wurden.

Ein anderer Prototyp eines Fermiproblems ist Fermis berühmte Frage: „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“, die er ohne weitere Information größenordnungsmäßig richtig beantworten konnte. Typisch dabei ist die alltagsnahe Fragestellung und die erste Einschätzung, dass es unmöglich ist, diese Frage ohne Spezialwissen (d. h. ohne einen Blick ins Telefon- oder Branchenbuch) zu beantworten.

Die Kunst bei der Bearbeitung eines Fermi-Problems ist, auf die richtige Weise zum Kern des Problems vorzustoßen und das Problem auf systematische Weise zu strukturieren und aufzugliedern. Bei der Klavierstimmer-Frage könnte man folgendermaßen vorgehen: Der erste Schritt besteht darin, zu erkennen, dass die Zahl der Klavierstimmer in Chicago kein „zufälliger“ Zahlenwert ist. Die Zahl der tatsächlich vorhandenen Klavierstimmer entspricht dem *Bedarf* an Klavierstimmern, d. h. der Zahl der Klavierstimmer, die in Chicago tatsächlich ihr Auskommen finden. Wenn man die Frage so uminterpretiert, beinhaltet sie nicht mehr eine Aussage über eine akzidentelle Größe, sondern eine Bedarfsabschätzung, die der analytischen Behandlung fähig ist.

Den Bedarf an Klavierstimmern kann man durch geschickte Untergliederung der Fragestellung abschätzen. Ausgehend von der Einwohnerzahl von Chicago schätzt man, wieviel Prozent der Haushalte ein Klavier besitzen und wie oft dieses gestimmt werden muss. Multipliziert man diese Zahl mit der Zeit, die es dauert, um ein Klavier zu stimmen, kommt man auf die jährliche Arbeitszeit für Klavierstimmer, die in Chicago anfällt. Nun muss man noch durch die geschätzte Jahresarbeitszeit eines Klavierstimmers teilen, um eine Abschätzung für die Zahl der Klavierstimmer zu erhalten. Von Fermi wird berichtet, dass zur Verblüffung seiner Studenten die Abschätzung einen recht guten Wert lieferte.

An dem Beispiel sollte deutlich geworden sein, dass man unter einem Fermiproblem weniger einen bestimmten Aufgabentypus als eine Art der Herangehensweise an eine Fragestellung versteht. Es handelt sich um eine Methode, um Fragestellungen, die auf den ersten Blick als zu komplex erscheinen oder zu deren Lösung die gegebene Information nicht ausreicht, dennoch näherungsweise beantworten zu können. Entsprechend ist man ist auf Abschätzungen angewiesen, bei denen man sich von Alltagserfahrungen und dem „gesunden Menschenverstand“ leiten lässt. Es geht nicht darum die interessierende Größe exakt zu berechnen, sondern man ist an Größenordnungsabschätzungen interessiert. Meist erhält man jedoch recht „gute“ Ergebnisse, was daran liegt, dass sich die unvermeidlichen Fehler beim Schätzen in den verschiedenen Schritten der Argumentationskette selten in eine Richtung aufaddieren, sondern sich tendenziell kompensieren.

Dass eine solche für die Schülerinnen und Schüler ungewohnte Herangehensweise das *Interesse* der Schüler zu wecken vermag, kann man leicht in einer Vertretungsstunde ausprobieren. Ganz analog zum Klavierstimmerproblem schätzt man gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Zahl der Frisiersalons in der Heimatstadt ab (Vorgehensweise: Wie oft gehst du zum Friseur? Wie viele Kunden kann ein Friseur pro Tag bedienen? Wie viele Einwohner der Stadt gehen überhaupt zum Friseur? Wie viele Friseure arbeiten im Schnitt in einem Salon?). Das Ergebnis kann man mit dem Telefonbuch sehr schnell überprüfen, und meist wird die Schätzung der Schüler recht gut mit dem wirklichen Wert übereinstimmen. In der Regel ist die Verblüffung groß, dass man „aus dem Nichts“ eine so gute Abschätzung gewinnen konnte (Näheres zum Einsatz von Fermiproblemen im Unterricht findet sich in einem eigenen Artikel in diesem Heft).

3. Fermiprobleme und Aufgabenkultur

Auf welche Weise können nun Fermiprobleme zur Verbesserung der Aufgabenkultur beitragen? Am bisher Gesagten sollte deutlich geworden sein, dass mit Fermi-Problemen die folgenden Fähigkeiten trainiert werden, die auch außerhalb der Physik als wichtige und erstrebenswerte Fertigkeiten angesehen werden:

- Problemstrukturen zu durchschauen,
- Komplexität zu reduzieren,
- Abschätzungen vorzunehmen,
- Größenordnungen zu beurteilen.

Darüber hinaus finden sich bei den Fermi-Problemen alle Aspekte wieder, die in der BLK-Expertise für die Verbesserung der Aufgabenkultur vorgeschlagen werden. Das soll an dem unten vorgestellten Fermi-Problem erläutert werden, der Frage, wie viele Menschen am Bau der ägyptischen Pyramiden beteiligt waren.

Dass es sich hierbei um einen interessanten Kontext handelt, der „dem Üben Reiz und Bedeutung“ verleiht steht wohl außer Frage. Interessante Kontexte aus der Alltagswelt bedingen häufig eine hohe Komplexität der Aufgabe, so dass sie für herkömmliche Aufgabentypen nicht in Frage kommen (vgl z. B. die in [7] als Fermiproblem behandelte Frage, ob es ökologisch sinnvoll ist, Autos mit Aluminiumkarosserie zu bauen). Es bietet sich dann an, die Aufgabe als Fermi-Problem zu stellen, wo die plausible Abschätzung einer nur schwer exakt zu berechnenden Größe ein legitimes Mittel ist.

Auch multiple Lösungswege ergeben sich bei Fermi-Problemen auf natürliche Weise. Die Aufgaben sind durch die offene Aufgabenstellung noch nicht vorstrukturiert, die Vorgehensweise bei der Lösung muss selbst gefunden werden, was eine gewisse Kreativität verlangt. In der Regel gibt es mehrere sinnvolle Lösungswege, die manchmal unterschiedlich schwer gangbar sind. Im hier vorgestellten Beispiel kann man z. B. die Reibungskoeffizienten durch Vergleich mit Tabellenwerken abschätzen oder experimentell selber ermitteln.

Schließlich kommt meist auch die vertikale Vernetzung von selbst ins Spiel. Aufgaben aus Alltagskontexten halten sich meist nicht an die Fachsystematik, so dass man gezwungen wird, schon länger zurückliegende Stoffinhalte zu aktivieren und zu verwenden. In der hier beschriebenen Aufgabe kommen z. B. folgende Themen aus dem Bereich der Mechanik zusammen vor: Kinematik, Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, Gleit- und Haftreibung, Leistung und schiefe Ebene.

4. Das Pyramidenproblem – Kulturgeschichtlicher Hintergrund

Bevor wir zur Aufgabe selbst kommen, soll noch kurz der kulturgeschichtliche Hintergrund geschildert werden, der sicherlich ebenfalls von Interesse ist. Die größte der ägyptischen Pyramiden (Abb. 2) wurde unter Pharao Cheops (Khufu) errichtet, der in der 4. Dynastie lebte, etwa 2500 v. Chr. Die Cheops-Pyramide hat eine beeindruckende Größe: Ihre ursprünglich Höhe ist 147 m, ihre Kantenlänge 233 m. Diese gewaltige Steinlast musste mit den technischen Hilfsmitteln bewegt werden, die den Ägyptern im Alten Reich zur Verfügung standen. Man kannte weder Rad noch Kran noch Flaschenzug (denn diese brauchen ja Umlenkrollen).

Abb. 2: Cheops-Pyramide

Wie wurden die Steinblöcke befördert, aus denen die Pyramide besteht? Der Hauptteil der Steinblöcke kam aus dem etwa 400 m entfernten Steinbruch südlich der Pyramide. Für die Verkleidung der Pyramide wurde Kalkstein aus einem Steinbruch am gegenüberliegenden Nilufer verwendet. Für die Auskleidung der Grabkammer und als Verschlusssteine für die inneren Gänge schaffte man sogar Granitblöcke aus dem 935 Kilometer weiter südlich gelegenen Assuan heran [8]. Nach dem heutigen Stand der Forschung wurden die Steinblöcke auf Holzschlitten verladen und von Arbeiterkolonnen an Seilen vom Steinbruch zur Pyramide gezogen (Abb. 3). Umstritten ist, wie die Blöcke an ihre endgültige Position gelangten. Allgemein nimmt man an, dass sie mit den Holzschlitten über eine Rampe an ihren Platz befördert wurden. Über die genaue Art dieser Rampe und ihren Verlauf kann man jedoch nur spekulieren.

Schon im Altertum faszinierte die Leistung der Ägypter, die in einer so frühen Phase der kulturellen Menschheitsgeschichte Bauwerke schuf, die in ihrer schieren Größe bis heute nicht übertroffen wurden – und dies mit einer erstaunlichen handwerklichen und vermessungstechnischen Präzision. Herodot schätzte 450 v. Chr., dass 100 000 Arbeiter zum Bau der Cheops-Pyramide benötigt wurden. Er kann sich Cheops nur als einen Tyrannen vorstellen, der die Arbeitskraft von Zwangsarbeitern rücksichtslos ausbeutet. Im 20. Jh. gibt es sogar Stimmen, die meinen, dass nur Außerirdische in der Lage gewesen wären, derartige Bauten zu errichten. Die Forschung ist dagegen heutzutage der Ansicht, dass die Arbeit von der ägyptischen Bevölkerung während der viermonatigen Überschwemmungszeiten des Nils geleistet wurde, in denen die landwirtschaftliche Arbeit ohnehin ruhen musste.

Abb. 3 Transport der Steinblöcke

5. Problemstellung

Nachdem die Errichtung der Pyramiden schon seit 2500 Jahren Interesse hervorruft, kann man sich dieses Thema auch für den Physikunterricht zunutze machen. Im folgenden soll die Zahl der Arbeiter abgeschätzt werden, die an der Errichtung der Cheops-Pyramide beteiligt waren.

Es soll eine eingeschränkte Fragestellung betrachtet werden, die aber den interesseheischendsten Teil der Arbeit betrifft. Wir fragen, wie viele Arbeiter man für den Transport der Steine vom Steinbruch bis zu ihrem endgültigen Platz im Bauwerk brauchte.

Diese Frage soll als Fermi-Problem aufgefasst werden, da uns natürlich über 4500 Jahre keinerlei exakte Information überliefert worden ist. Diese Vorgehensweise hat Vorzüge, die den Zugang auch in den Augen der Schülerinnen und Schüler attraktiv erscheinen lassen: Die professionelle Archäologie hat in dieser Frage keinen Informationsvorsprung. Sie ist auf ähnliche Methoden und Überlegungen angewiesen wie die Schülerinnen und Schüler. In der Schule können wir also ein nichttriviales wissenschaftliches Ergebnis nachvollziehen. Dazu wird nur einfachste Physik aus dem Mechanik-Anfangsunterricht benötigt. Allerdings – und auch dies muss gesagt werden – verlangt die Aufgabe eine recht große Abstraktions- und Problemstrukturierungsfähigkeit, um den Lösungsweg zu im Voraus zu planen. Daher ist sie für den Anfangsunterricht in Mechanik im 7. und 8. Schuljahr sicherlich zu schwierig. Am besten geeignet ist sie zu Wiederholung der einfachen mechanischen Gesetzmäßigkeiten im 10. und 11. Schuljahr.

Wir gliedern den Lösungsweg in die folgenden Teilschritte:
- Wie viele Steinblöcke mussten pro Tag aus dem Steinbruch herangeschafft werden?
- Wie viele Arbeiter brauchte man pro Lastschlitten?
- Wie schnell konnte ein Schlitten gezogen werden?
- Wie viele Schlittenteams mussten gleichzeitig unterwegs sein?

Die drei letzten Fragen werden getrennt für den Weg vom Steinbruch zur Pyramide und für den Weg auf der Rampe behandelt. Bei der Rampe kommt als neuer Aspekt die Physik der schiefen Ebene ins Spiel.

6. Die Steinblöcke

Fragen wir zunächst wie viele Steinblöcke insgesamt in der Cheops-Pyramide verbaut wurden. Mit einer Höhe von 147 m und einer Kantenlänge von 233 m ist ihr Volumen $V = l^2\, h/3 = 2{,}65 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3$. Ein Steinblock hat ein Volumen von etwa 1 m^3. Das heißt, dass die Pyramide aus etwa 2,65 Millionen Steinblöcken besteht, die herangeschafft werden mussten.

Pharao Cheops regierte 23 Jahre; wir müssen davon ausgehen, dass seine Pyramide innerhalb von etwa 20 Jahren erbaut wurde. Eine längere Bauzeit ist unwahrscheinlich, denn man vollendete eine beim Tod des Pharaos unfertige Pyramide nicht unbedingt, wie das Beispiel von einigen Pharaonen der 3. Dynastie und auch von Cheops‘ Sohn Djedefrê zeigt: Als dieser nach nur achtjähriger Regierungszeit starb, blieb die von ihm begonnene Pyramide unvollendet [9].

Wie viele Blöcke mussten die Schlittenteams nun pro Tag anliefern? Gehen wir pro Jahr von einer viermonatigen Bauphase in der Überschwemmungszeit aus, konnte ohne Ruhetage 120 Tage gearbeitet werden. In zwanzig Jahren sind das 2400 Tage. In dieser Zeit mussten alle Steinblöcke angeliefert werden. Teilt man die Zahl der Blöcke durch die Zahl der Tage, erhält man unser erstes Teilergebnis:

Pro Tag mussten etwa 1000 Steinblöcke herangeschafft werden.

Wenn man einen Arbeitstag von 12 Stunden zugrunde legt, sind das fast 80 Blöcke pro Stunde, die tagaus, tagein, kontinuierlich herbeigeschafft werden mussten – eine beachtliche Menge, die aber von ausreichend vielen Arbeitern durchaus zu bewältigen ist.

7. Das Schlittenteam

Als nächstes versuchen wir zu ermitteln, wie viele Arbeiter an einem Schlitten ziehen mussten. Diese Zahl wird durch die Physik weitgehend bestimmt. Wir beschränken uns zunächst auf den Weg vom Steinbruch zur Rampe, also in der Ebene. Die größte Kraft ist am Anfang der Bewegung aufzubringen, wenn der Schlitten in Bewegung gesetzt werden soll. Denn wenn zu wenige Arbeiter an dem Schlitten ziehen, kann die Haftreibungskraft $F_{H,\max}$ nicht überwunden werden und der Schlitten rührt sich nicht (Abb. 4).

Die maximale Haftreibungskraft ist

$$F_{H,\max} = \mu_H \cdot M \cdot g.$$

Abb. 4: Die Haftreibungskraft muss überwunden werden

Dabei ist μ_H der Haftreibungskoeffizient, M die Masse eines Blocks und g die Erdbeschleunigung. Wie man in der Formelsammlung nachschlagen kann, beträgt die durchschnittliche Dichte von Stein ca. 2500 kg/m^3. Bei einem Volumen von 1 m^3 hat ein Steinblock also eine Masse von etwa 2500 kg.

Der Haftreibungskoeffizient ist etwas schwieriger abzuschätzen. In den Tabellenwerken findet man Werte von $\mu_H = 0{,}5$ für Holz auf Holz und $\mu_H = 0{,}7$ für Holz auf Stein. Es ist jedoch anzunehmen, dass die Ägypter den Untergrund vor dem Schlitten mit Lehm und Wasser schmierten und so den Haftreibungskoeffizienten herabsetzten. Als Schätzwert kann man $\mu_H = 0{,}3$ ansetzen.

Damit können wir die maximale Haftreibungskraft abschätzen, die zu überwinden ist, um den Schlitten in Bewegung zu setzen. Einsetzen der Werte führt auf $F_{H,\max} = 7350$ N.

Nun müssen wir ermitteln, mit welcher Kraft ein Arbeiter am Seil ziehen konnte. Dann können wir feststellen, wie viele Arbeiter notwendig waren, um die erforderliche Zugkraft von 7350 N aufzubringen. Dies schätzen wir wie folgt ab: Ein Erwachsender kann einigermaßen bequem einen Kartoffelsack von 25 kg heben. Dazu ist eine Kraft von 250 N nötig. Legen wir diese Kraft auch für einen ägyptischen Arbeiter zugrunde, sehen wir, dass man mit 30 Arbeitern pro Schlitten die Zugkraft von 7350 N aufbringen konnte. Damit haben wir unser zweites Teilergebnis erhalten:

An einem Schlitten mussten etwa 30 Arbeiter ziehen.

8. Geschwindigkeit eines Schlittens

Wir haben nun herausgefunden, wie viele Arbeiter vermutlich an einem Schlitten gezogen haben. Aber wie schnell kam ein von 30 Männern gezogener Schlitten voran? Auch dies lässt sich mit physikalischen Überlegungen herausfinden. Bei konstanter Geschwindigkeit muss mit einer Kraft gezogen werden, die gerade so groß ist wie die Gleitreibungskraft $F_G = \mu_G \cdot M \cdot g.$ Hier bezeichnet μ_G den Gleitreibungskoeffizienten, für den wir, entsprechend den Überlegungen zur Schmierung beim Haftreibungskoeffizienten, einen Wert von 0,2 annehmen. Beim Ziehen verrichten die Arbeiter gegen die Gleitreibungskraft eine Arbeit $W = F_G \cdot s$. Ihre Leistung ist entsprechend $P = W/t = F_G \cdot v$.

Wir wissen (z. B. vom Fahrradergometer), dass ein Mensch ohne zu ermüden dauerhaft eine Leistung von etwa 100 W erbringen kann. Die 30 Arbeiter am Schlitten können also zusammen 3000 W leisten, die zum Ziehen des Schlittens genutzt werden können. Aus diesen Angaben können wir die Geschwindigkeit bestimmen, mit der ein Schlitten gezogen werden konnte:

$$\upsilon = \frac{P}{F_G} = \frac{P}{\mu_G \cdot M \cdot g}. \tag{1}$$

Setzen wir die angegebenen Zahlenwerte ein, erhalten wir:

$$\upsilon = \frac{3000\,\mathrm{W}}{0{,}2 \cdot 2500\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 2\,\mathrm{km/h}$$

Dieser Wert geht von idealisierten Voraussetzungen aus. Durch Unebenheiten, ungleichmäßiges Ziehen u. ä. war die erzielte Geschwindigkeit geringer. Wir gehen für die weiteren Überlegungen von einer Geschwindigkeit von 1 km/h aus. Das ist unser drittes Ergebnis:

Ein Schlitten konnte mit einer Geschwindigkeit von 1 km/h gezogen werden.

9. Zahl der Schlittenteams

Nun haben wir alle Angaben beisammen, die wir benötigen um die Zahl der Arbeiter abzuschätzen, die vom Steinbruch bis zum Fuß der Pyramide mit Ziehen beschäftigt waren. Bei einer Geschwindigkeit von 1 km/h brauchte ein Schlitten für die 400 m zwischen Steinbruch und Fuß der Pyramide $t = s / \upsilon$ = 24 Minuten. Dazu kommen noch der Rückweg sowie die Zeit, die man für das Beladen des Schlittens rechnen muss. Man wird also pro Schlittenteam mit etwa einer Stunde pro Steinblock rechnen können.

Geht man von einer effektiven Arbeitszeit von 10 Stunden pro Tag aus, kann ein Schlittenteam täglich etwa 10 Steinblöcke heranschaffen. Benötigt werden aber 1000 Blöcke, so dass 100 Schlittenteams à 30 Mann gleichzeitig tätig sein müssen. Damit haben wir unser erstes Endergebnis:

Für das Ziehen der Schlitten zwischen Steinbruch und Fuß der Pyramide wurden etwa 3000 Arbeiter benötigt.

10. Auf der Rampe

Bisher haben wir uns nur auf den Weg vom Steinbruch zum Fuß der Pyramide beschränkt. Die Steine mussten jedoch auch nach oben befördert werden. Die meisten Forscher gehen davon aus, dass die Steinblöcke auf den Holzschlitten auf einer Rampe nach oben gezogen wurden. Über die Art der Rampe und ihren Verlauf ist nichts mehr bekannt. Eine linear ansteigende Rampe ist unwahrscheinlich, da es sich dabei selbst um ein riesenhaftes Bauwerk gehandelt hätte. Möglich wäre eine spiralförmig umlaufende Rampe oder auch unterschiedliche Rampentypen in den verschiedenen Bauabschnitten.

Glücklicherweise müssen wir für unsere physikalischen Überlegungen auch kaum etwas über die genaue Art der Rampe wissen. Der Neigungswinkel ist die einzige Größe, die in unsere Überlegungen eingeht. Er ist aber schon dadurch festgelegt, dass ein einigermaßen bequemes Ziehen möglich sein muss. Wir schätzen ihn mit etwa 20° ab.

Im Lauf der Bauarbeiten wuchs die Pyramide, d. h. die Rampe wurde länger. Die Strecke, die die Arbeiter mit ihren Schlitten auf der Rampe zurücklegen mussten, wurde also länger. Das kompliziert die Überlegungen etwas. Für unsere Abschätzung sind wir an einer typischen Situation interessiert. Nehmen wir also den typischen Fall an, dass eine Stein bis zur Höhe des Schwerpunkts der Pyramide transportiert werden muss. Der Schwerpunkt liegt bei einerm Viertel der Pyramidenhöhe, das bedeutet für die Cheopspyramide also h = 147 m / 4 = 37 m. Die Länge s des zurückzulegenden Wegs wird dann:

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = 107\,\text{m}.$$

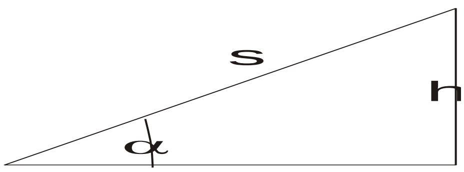

Abb. 4: Bezeichnungen an der schiefen Ebene

Mit der Rampe kommt nun die ganze Mechanik der schiefen Ebene ins Spiel. Den ziehenden Arbeitern wirkt zusätzlich zur Reibungskraft die Hangabtriebskraft $m\,g\,\sin\alpha$ entgegen. Dafür reduziert sich die Reibungskraft, denn die Normalkraft, d. h. die Komponente der Gewichtskraft senkrecht zur Rampe) beträgt nun nur noch $m\,g\,\cos\alpha$. Damit sich der Block in Bewegung setzt, müssen die Arbeiter mit einer Kraft ziehen, die größer ist als

$$F_{\text{H, Rampe}} = m \cdot g(\mu_H \cos\alpha + \sin\alpha). \qquad (2)$$

Setzt man die Zahlenwerte für einen Winkel $\alpha = 20^\circ$ ein, erhält man eine Kraft von 15 300 N. Sie ist etwa doppelt so groß wie in der Ebene. Geht man wieder von 250 N pro Arbeiter aus, sieht man, dass auf der Rampe etwa 60 Arbeiter pro Schlitten notwendig waren.

Pro Schlitten waren auf der Rampe etwa 60 Arbeiter notwendig.

Es ist anzunehmen, dass die ankommenden Schlitten am Fuß der Rampe von hinzukommenden Arbietern verstärkt wurden. Damit die Berechnungen in der Ebene und auf der Rampe unabhängig voneinander durchgeführt werden können, nehmen wir reine „Rampenarbeiter“ und reine „Ebenenarbeiter“ an. Man kann natürlich auch für ein einzelnes Schlittenteam die Zeit in der Ebene und auf der Rampe addieren. Das Ergebnis ist natürlich das gleiche, es handelt sich hier um ein Beispiel für multiple Lösungswege.

Die Geschwindigkeit eines Schlittens auf der Rampe kann in Analogie zur Ebene erfolgen. Wieder ist die erzielte Geschwindigkeit durch $v = P / F$ gegeben, wobei P nun die von 60 Arbeitern erbrachte Leistung ist: P = 60 · 100 W = 6000 W. Für die Kraft müssen wir die Gleitreibungskraft auf der schiefen Ebene einsetzen, die aus (2) durch Ersetzen von μ_H durch μ_G hervorgeht. Es ergibt sich:

$$v = \frac{P}{m \cdot g(\mu_G \cos\alpha + \sin\alpha)} = 0{,}45\,\text{m/s} = 1{,}6\,\text{km/h}.$$

Auch hier wurde mit idealen Bedingungen gerechnet, realistisch ist – auch in Anbetracht des Gedränges auf der Rampe – vielleicht die Hälfte des errechneten Wertes, also 0,8 km/h.

Auf der Rampe betrug die Geschwindigkeit eines Schlittens etwa 0,8 km/h.

Nun können wir aus $t = s / v$ die Zeit berechnen, die ein Schlitten zum Überwinden der Rampe braucht: Es ergeben sich 8 Minuten. Zusammen mit dem Rückweg und dem Entladen kann mit 20 Minuten rechnen, die ein Schlitten auf der Rampe verbringt. Das bedeutet 3 Blöcke pro Stunde, die ein Schlittenteam auf der Rampe transportieren kann. Bei einem zehnstündigen Arbeitstag macht das 30 Blöcke pro Tag. Benötigt werden 1000 Blöcke pro Tag. es müssen also 33 Schlitten à 60 Arbeiter gleichzeitig auf der Rampe unterwegs sein. Das bedeutet:

Für das Ziehen der Schlitten auf der Rampe wurden etwa 2000 Arbeiter benötigt.

Eine solche Zahl von Arbeitern ist auf einer gut 100 m langen Rampe nur mit Mühe unterzubringen. Als Abhilfe bietet sich an, mehrere Rampen zu verwenden, solange die Pyramide noch relativ niedrig ist. Alternativ könnte man die Rampe auch flacher machen, so dass sie länger wird und damit mehr Platz vorhanden ist.

11. Ergebnis

Für unsere eingeschränkte Fragestellung konnten wir eine Abschätzung der zum Bau der Pyramiden nötigen Arbeiterzahl geben. In der Ebene und auf der Rampe waren zusammen etwa 3000 + 2000 = 5000 Arbeiter nötig. Bei der Berechnung haben wir „soziale Faktoren“ wie Krankheit, freie Tage u. a. außer Acht gelassen. Wie es damit in der Frühzeit des alten Ägypten aussah, wissen wir natürlich nicht. Erst aus viel späterer Zeit, aus der 19. Dynastie (ca. 1300 v. Chr.) sind Anwesenheitslisten aus dem Dorf Deir el-Medina vorhanden, in dem die Arbeiter für die Gräber im Tal der Könige wohnten. Aus ihnen geht hervor, dass die Arbeiter der Arbeit häufig fernblieben. Als Gründe werden genannt: „die Mumifizierung von Angehörigen, Familienstreitigkeiten, Trunkenheit und das Brauen von Bier“ [8, S. 60]. Es ist also vielleicht realistisch, die tatsächliche Zahl der Transportarbeiter auf 10 000 anzusetzen.

Bisher haben wir nur die für den Transport der Steinblöcke erforderliche Arbeiterzahl abgeschätzt. Beim Pyramidenbau waren aber noch zahlreiche weitere Arbeitskräfte notwendig: Arbeiter in den Steinbrüchen, beim Be- und Entladen der Schlitten, zum Einpassen der Steine in die Baukonstruktion. Dazu kommen Planung, Logistik (Versorgung mit Nahrungsmitteln) sowie Werkzeugherstellung und -reparatur. Alles in allem wird man mit 20 000 bis 30 000 Beschäftigten rechnen können. Es ist interessant, dass die moderne Altertumswissenschaft zu ganz ähnlichen Ergebnissen kommt [8].

Die Organisation der Arbeit für eine solch große Zahl von Menschen ist für das Altertum keine geringe Leistung. Dass man sich darauf verstand, zeigen (in späterer Zeit) das Beispiel von Ramses II., der mit 20 000 Soldaten in die Schlacht von Kadesch zog oder die Assyrerheere, die sich auf 100 000 Soldaten beliefen.

[1] BLK (Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung), *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*, o. O. (1997).
[2] P. Häußler, G. Lind, BLK-Programmförderung, Erläuterung zu Modul 1, o. O. (1998).
[3] Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU), *Physikunterricht und naturwissenschaftliche Bidlung – aktuelle Anforderungen*, abgedruckt in MNU **54** (2001), Heft 3.
[4] Praxis der Naturwissenschaften-Physik **49** (2000), Heft 4.
[5] P. Häußler, G. Lind, *„Aufgabenkultur“ – Was ist das?*, PdN-Ph, 4/49, S. 2 (2000).
[6] R. Jungk, *Heller als tausend Sonnen*, Bertelsmann, Gütersloh 1962
[7] R. Müller, *Autos aus Aluminium? Ein Beitrag zur Umwelterziehung in der Schule*, PdN-Ph 50, S. 44 (2001).
[8] C. Scarre (Hrsg.), Die siebzig Weltwunder, Zweitausendeins, Frankfurt (2000)
[9] E. Hornung, Grundzüge der ägyptischen Geschichte, WBG, Darmstadt (1992).