Fermiprobleme in fächerübergreifenden Kontexten

1. Einleitung

Der Einsatz von Fermiproblemen im Unterricht muss nicht auf physikalische Inhalte beschränkt bleiben. Bereits in [1] wurden zahlreiche Beispiele aus alltäglichen Zusammenhängen vorgestellt. Aber auch wenn physikalische Gesetzmäßigkeiten geübt werden sollen, bieten Fermiprobleme die Möglichkeit, dies in interessanten und motivierenden Kontexten zu tun. Auf diese Weise können fächerübergreifende Aspekte in den Physikunterricht eingebunden werden. In diesem Artikel sollen einige Beispiele für physikalische Fragestellungen in biologischen Kontexten vorgestellt werden.

2. Wie gefräßig ist ein Hai?

Als erstes Beispiel für die Einbettung physikalischer Inhalte in einen interessanten Kontext aus dem Tierreich untersuchen wir die Frage:

Wie viele Fische pro Tag muss ein Hai fressen?

Haie gelten im Allgemeinen als gefräßige und brutale Killer, die alles fressen, was so unklug ist, ihren Weg zu kreuzen. Bezeichnend ist ihre Charakterisierung als „Appetit mit Eigenantrieb“. Man denkt an Filme, in denen Haie harmlose Schwimmer an Badestränden als Leckerbissen betrachten. Dabei wird meist übersehen, dass sehr viel mehr Haie von Menschen verzehrt werden als umgekehrt.

Eine interessante Frage, die kaum jemand beantworten kann, ist: Wie viel frisst ein Hai eigentlich pro Tag? Die Schätzungen reichen von einigen Kilogramm Fisch bis zu mehreren Tonnen. Es ist bemerkenswert, dass man diese Frage als Fermiproblem behandeln kann und das (erstaunliche) Ergebnis größenordnungsmäßig abschätzen kann.

Der Ansatzpunkt zur Lösung des Problems liegt in einer physiologischen Besonderheit der Haie: Sie müssen schwimmen, um atmen zu können. Haie sind nicht in der Lage, das Atemwasser aktiv in die Kiemen zu spülen. Sie werden nur dann mit Sauerstoff versorgt, wenn durch ihre Eigenbewegung ausreichend Wasser durch ihre Kiemen strömt. Selbst wenn sie schlafen, müssen die Haie schwimmen.

Aus eigener Erfahrung weiß man, dass Schwimmen eine anstrengende Beschäftigung ist. Um die Bewegung aufrecht zu erhalten muss auch ein Hai ständig Arbeit gegen den Strömungswiderstand des Wassers leisten. Die Vermutung liegt nahe, dass hier der Grund für seinen großen Appetit liegt. Sind Haie so gefräßig, weil sie ständig schwimmen müssen?

In dieser Formulierung wird das Problem einer physikalischen Behandlung zugänglich. Wir nehmen an, dass das Schwimmen die Haupttätigkeit eines Haies ist, bei der er am meisten Energie verliert. Dann können wir die Arbeit berechnen, die er während eines Tages gegen den Widerstand des Wassers leistet und daraus auf seinen Nahrungsbedarf zurückschließen.

Ein Punkt muss vorher noch geklärt werden: Die Wärmeabgabe an das Wasser muss bei dieser Bilanz nicht berücksichtigt werden. Haie sind Kaltblüter, die ihre Körpertemperatur nicht auf einem bestimmten Niveau stabilisieren müssen. Zwar wird Wärme an das Wasser abgegeben, es handelt sich dabei aber um „Abwärme“, die dadurch entsteht, dass die Muskeln die chemische Energie aus der Nahrung nicht vollständig in mechanische Energie umwandeln können. Wir werden dies durch Annahme eines Wirkungsgrades kleiner als 1 berücksichtigen.

Um einen konkreten Fall zu behandeln, betrachten wir einen Blauhai (Abb. 2). Er wird etwa 3 – 4 m lang und sein Körperdurchmesser beträgt ca. 50 cm. Seine durchschnittliche Geschwindigkeit schätzen wir mit 0,5 m/s, also etwa 2 km/h ab. (Der Blauhai gilt als schneller Schwimmer. Die größte beobachtete Wegstrecke, die er während eines Tages zurückgelegt hat, liegt bei 55 km [2]).

Man vermutet, dass ein Hai, der sich durchs Wasser bewegt, ein turbulentes Strömungsmuster verursacht. Die Strömungswiderstandskraft ist in diesem Fall durch die Formel

$$F = c_W \cdot A \cdot \tfrac{1}{2}\rho v^2 \qquad (1)$$

gegeben, die z. B. auch vom Luftwiderstand bei Autos bekannt ist. Hierbei ist A die Stirnfläche des umströmten Objekts, ρ die Dichte des Mediums (also des Wassers) und v die Relativgeschwindigkeit zwischen Objekt und Medium. c_W ist der sogenannte Widerstandsbeiwert, der empirisch ermittelt wird.

Dass es sich tatsächlich um eine turbulente Strömung handelt, kann man nach dem Reynolds-Kriterium bestätigen. Die Reynolds-Zahl ist definiert durch

$$\mathrm{Re} = \frac{l \cdot \rho \cdot v}{\eta},$$

wobei *l* eine für den Körper charakteristische Länge bezeichnet (hier z. B. die Länge des Hais) und η die dynamische Viskosität ist, die für Wasser den Wert 10^{-3} N s/m^2 besitzt. Setzt man die Werte für den Blauhai ein, erhält man eine Reynolds-Zahl von $1{,}5 \cdot 10^6$. Turbulente Strömung stellt sich für Reynolds-Zahlen größer als etwa $5 \cdot 10^5$ ein, so dass die Widerstandskraft tatsächlich durch Gleichung (1) beschrieben wird.

Auch wenn man gleich von Gleichung (1) ausgehen könnte, eröffnet das Berechnen der Reynolds-Zahl doch eine interessante Einsicht in die evolutionäre Anpassung der Haie. In Abb. 3 ist der Wert von c_W in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl aufgetragen. Man erkennt einen scharfen Abfall des Strömungswiderstandes bei Reynolds-Zahlen um $5 \cdot 10^5$, also kurz nach dem Einsetzen der Turbulenz. Turbulente Strömung ist in diesem Fall also *strömungsgünstiger* als laminare. Die Evolution hat die Haie in der Nähe dieses strömungsgünstigen Bereichs positioniert. Für das Abfallen des Strömungswiderstands verantwortlich ist das Einsetzen der Turbulenz in der am Körper anliegenden Grenzschicht. Um diesen Effekt auszunutzen, hat der Golfball Dellen, tragen Schwimmer Kleidung mit speziell aufgerauter Oberfläche, und auch die Haie besitzen „Riblets“ auf ihrer Haut, die den Strömungswiderstand herabsetzen, indem sie für ein früheres Einsetzen der Grenzschicht-Turbulenz sorgen.

Abb. 3: Veränderung des Werts c_W in Abhängigkeit von der Reynoldszahl (aus [3])

Kommen wir nun zur eigentlichen Berechnung der Arbeit, die ein Hai gegen den Widerstand des Wassers leisten muss. Sie ergibt sich aus $W = F \cdot s$ oder, wenn wir von einer konstanten Geschwindigkeit ausgehen, $W = F \cdot v \cdot t$. Setzen wir Gleichung (1) für die Kraft ein, erhalten wir

$$W = c_W \cdot A \cdot \tfrac{1}{2}\rho \cdot v^3 \cdot t. \qquad (2)$$

Nun können wir Zahlenwerte einsetzen. Gemäß dem vorher Gesagten nehmen wir an, dass der Hai den kleinsten realisierbaren Widerstandsbeiwert $c_W = 0{,}05$ besitzt, der einer optimalen Stromlinienform entspricht. Für die Fläche setzen wir $A = r^2\,\pi = 0{,}2$ m^2 ein und $t = 24$ h, da wir an der pro Tag umgesetzten Energie interessiert sind. Setzen wir die Zahlen ein, erhalten wir $W = 74$ kJ. Dies ist die pro Tag beim Schwimmen gegen den Widerstand des Wassers verrichtete Arbeit.

Wie schon angesprochen, wandeln die Muskeln nicht die gesamte chemische Energie aus der Nahrung in mechanische Energie um. Der typische Wirkungsgrad von Muskeln liegt bei 25%. Das bedeutet: Der Hai-Organismus muss aus der pro Tag gefressenen Nahrung $4 \cdot 74$ kJ ≈ 300 kJ entnehmen, damit der Hai 24 Stunden schwimmen kann. Das Ergebnis unserer Abschätzung lautet also:

Zum Schwimmen braucht ein Hai ca. 300 kJ pro Tag.

Welche Menge an Fisch muss der Hai dazu fressen? Wir gehen davon aus, dass der Stoffwechsel eines Hais die gleiche Energiemenge aus der Nahrung entnehmen kann wie der des Menschen und schauen im Kochbuch nach. Dort findet man, dass 100 g Rotbarsch 230 kJ enthalten [4]. Das heißt:

Ein Hai muss täglich 130 g Fisch fressen.

Dieses Ergebnis erscheint zunächst absurd. Man würde nicht vermuten, dass ein Hai sich mit so wenig Nahrung begnügt. Vergleicht man die Werte mit dem Menschen: 300 kJ entsprechen etwa 70 kcal, eine Energiemenge, bei der ein Mensch (Bedarf 2500 kcal/Tag) kläglich verhungern würde. Man vermutet, dass man sich verrechnet hat oder dass eine der Annahmen grundlegend falsch ist. Um so verblüffender ist es, dass der berechnete Wert dennoch in der richtigen Größenordnung liegt. In der Literatur findet man die folgende Aussage:

„Dennoch kann man bei Haien nicht von gefräßigen Räubern sprechen. Ein schönes Beispiel hierfür ist der Blauhai. Ein zwei Meter langer Blauhai von 50 kg Gewicht nimmt pro Jahr ca. 100 kg Nahrung zu sich, das sind umgerechnet 270 Gramm pro Tag“ [5].

Die Auffassung der Aufgabe als Fermiproblem hat uns in einem interessanten Kontext gezeigt, wie man biologische Fakten mit physikalischen Gesetzen analysieren kann und eine quantitative Abschätzung in der richtigen Größenordnung geliefert. Die Übereinstimmung wird sogar noch beeindruckender, wenn man berücksichtigt, dass das Schwimmen nicht die einzige Aktivität des Hai-Organismus darstellt, sondern Energie auch für andere physiologische Funktionen aufgewendet wird.

3. Wale – ein Energieproblem im Wasser

Nachdem es uns gelungen ist, den Energieumsatz für Haie zu bestimmen, können wir etwas Ähnliches für Wale versuchen. Wir fragen also:

Wie viel muss ein Blauwal pro Tag fressen?

Obwohl die Aufgabenstellung sich ganz gleich anhört wie im Fall der Haie, ist die Vorgehensweise und die dahinter stehende Physik in diesem Fall ganz andersartig. Denn Wale haben ganz andere energetische Probleme als Haie. Sie sind Warmblüter und besitzen eine Körpertemperatur von 37° C. Damit haben sie im kalten Wasser der Meere ein großes Problem: den Wärmeverlust. Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Körperoberfläche und Wasser ist sehr viel größer als in Luft (etwa um einen Faktor 50). Das bedeutet: einem Körper in Wasser wird bei gleicher Temperaturdifferenz 50 Mal mehr Wärme entzogen als in Luft (vgl. auch das Fermiproblem zur angenehmen Wassertemperatur im Schwimmbad in [6]). Die gegen den Widerstand des Wassers zu leistende Arbeit besitzt etwa die gleiche Größenordnung wie bei den Haien und ist dagegen völlig zu vernachlässigen.

Die Wale haben es geschafft, sich an ihren Lebensraum anzupassen. Neben einem ausgeklügelten Gegenstromsystem zum Vermeiden von Wärmeverlusten durch den Bluttransport haben sich die Wale eine Speckschicht zugelegt, die die Wärmeleitungsverluste gering halten soll. Der Walspeck wird Blubber genannt; der aus ihm gewonnene Tran diente früher zur Herstellung von Seifen und Ölen. Er war einer der Gründe, weshalb die Wale bis an den Rand ihrer Ausrottung bejagt wurden.

Wie dick die Speckschicht eines Blauwals ist, hängt von verschiedenen Umständen ab. Die Dicke variiert je nach Jahreszeit und Lebensraum des Wals. Beim Blauwal werden Werte zwischen 5 cm und 30 cm (an den dicksten Stellen) genannt.

Mit diesen Angaben können wir ein Modell zum Wärmeverlust eines Blauwals aufstellen. Wir gehen von einer Dicke der Speckschicht von 10 cm aus. Wir nehmen weiterhin an, dass der Wal seine gesamte pro Tag umgesetzte Energie als Wärme ans Wasser abgibt. Das heißt, wir vernachlässigen die beim Schwimmen gegen den Wasserwiderstand geleistete Arbeit.

Die gesamte vom Wal abgegebene Wärmemenge Q muss durch die Speckschicht geleitet werden. Nach der Wärmeleitungsgleichung gilt

$$\frac{Q}{t} = \frac{\lambda}{d} \cdot A \cdot \Delta T, \tag{3}$$

wobei A die Körperoberfläche des Wals, d die Dicke der Speckschicht und λ ihre Wärmeleitfähigkeit ist. Die Wärmeleitfähigkeit von Fettgewebe beträgt etwa ein Drittel derjenigen von Wasser, also 0,2 W/(m · K). Wir nehmen an, dass die Speckschicht so effektiv isoliert, dass auf ihrer Innenseite die Körpertemperatur von 37º C herrscht. Die Haut des Wals (und damit auch die Außenseite der Speckschicht) muss die Temperatur des Wassers besitzen, denn wie bereits erläutert ist der Wärmeübergangswiderstand Haut-Wasser zu vernachlässigen. Die Wassertemperatur setzen wir mit 7º C an, so dass ΔT = 30º C.

Nun müssen wir noch eine Abschätzung für die Körperoberfläche des Wals finden. Wir modellieren ihn als einen Zylinder mit einer Länge von 30 m und einem Durchmesser von 4m. Damit ergibt sich A = 400 m^2.

Mit diesen Angaben können wir die Wärmemenge ausrechnen, die der Wal pro Tag an das Wasser abgibt. Setzen wir alle Werte in Gleichung (3) ein, erhalten wir einen Wert von $2 \cdot 10^6$ kJ. Nach unseren Modellannahmen ist dies der gesamte tägliche Energieumsatz des Wals:

Ein Blauwal hat einen Energieumsatz von $2 \cdot 10^6$ kJ pro Tag.

Der Unterschied zu den 300 kJ / Tag beim Hai ist beeindruckend. Der Blauwal muss über 6000 Mal mehr Energie mit der Nahrung zu sich nehmen als ein Hai. Das Aufrechterhalten einer hohen Körpertemperatur ist sehr energieintensiv. An diesem Ergebnis verifiziert man auch, dass es in der Tat gerechtfertigt war, die beim Schwimmen geleistete Arbeit zu vernachlässigen, denn sie liegt in der gleichen Größenordnung wie im Fall des Hais.

Ein Blauwal muss also sehr viel Nahrung zu sich nehmen. Er lässt deshalb beim Schwimmen ungeheure Mengen von Wasser durch sein Maul laufen und filtert mit seinen Barten seine Nahrung heraus. Er ernährt sich hauptsächlich von Kleinkrebsen und anderem Zooplankton, in antarktischen Gewässern vor allem von Krill.

Der physiologische Brennwert dieser Nahrung lässt sich durch den Wert für Garnelen abschätzen, den man in der Kalorientabelle findet. Ihr physiologischer Brennwert ist 4000 kJ/kg. Um auf einen Tagesumsatz von $2 \cdot 10^6$ kJ zu kommen, muss der Wal demnach 500 kg Plankton oder Krill zu sich nehmen. Das ist das Ergebnis unseres Problems:

Ein Blauwal muss pro Tag etwa 500 kg Plankton fressen.

Vergleichen wir mit dem aus der Empirie gewonnenen Literaturwert (wobei sich gleich eine neue interessante Fragestellung ergibt: Wie ermittelt man eigentlich, wie viel ein Blauwal pro Tag frisst?): Man findet eine recht weite Spanne zwischen 900 kg und 4 Tonnen pro Tag [7]. Unser Wert liegt also etwas zu niedrig. Man muss jedoch noch berücksichtigen, dass Blauwale Nahrung fast nur im polaren Sommer zu sich nehmen, wenn die antarktischen Gewässer sehr nahrungsreich sind. In dieser Zeit müssen sie genügend fressen, um den Winter zu überstehen, den sie am nahrungsarmen Äquator verbringen. Diese zusätzlich benötigte Nahrung wurde in unserer Rechnung nicht berücksichtigt.

4. Der Energieumsatz von Tieren

Große Tiere müssen viel fressen und kleine Tiere wenig. Das ist eine Binsenweisheit. Aber wie groß ist denn eigentlich die Nahrungsmenge, die eine Katze zu sich nehmen muss? Und wie viele Kilojoule pro Tag benötigt ein Elefant? Kann man den Energieumsatz eines Tieres aus seiner Größe vorhersagen? Das ist die nächste Fragestellung, die wir als Fermiproblem behandeln wollen.

Der nächstliegende Ansatz ist der folgende: Die mit der Nahrung aufgenommene Energie wird in den Zellen eines Tieres umgesetzt. Deshalb sollte die umgesetzte Energiemenge proportional zur Zahl der Zellen und damit proportional zum Volumen des betreffenden Tieres sein. Dies ist eigentlich eine sehr plausible Überlegung, deren einziger Nachteil es ist, dass sie nicht mit den empirisch gefundenen Daten zusammen passt. Die experimentell gefundenen Energieumsaätze verschiedener Tiere sind *nicht* proportional zum Volumen. Um dies zu verstehen, muss man eine biologische Vorüberlegung anstellen.

Katzen, Hunde und Elefanten sind Warmblüter. Sie erhalten aktiv eine bestimmte Körpertemperatur aufrecht, die sich für die meisten Warmblüter im Bereich zwischen 36º C und 40º C bewegt. Der Grund dafür liegt in der Biochemie: Enzymatische Reaktionen brauchen eine bestimmte Temperatur, um effektiv abzulaufen. Die Reaktionsgeschwindigkeit hängt nach der Arrhenius-Gleichung über einen Boltzmann-Faktor, also exponentiell, von der Temperatur ab. Die Körpertemperatur kaltblütiger Tiere folgt der Umgebungstemperatur, was zur Folge hat, dass bei niedrigen Temperaturen viele Stoffwechselreaktionen nur reduziert ablaufen. Warmblütige Tiere mit ihrer konstanten Körpertemperatur haben diesen Nachteil nicht. Sie müssen dafür mit einem hohen Energieumsatz bezahlen. Denn wie wir aus dem Vergleich zwischen Blauwal und Hai gelernt haben, ist das Aufrechterhalten der hohen Körpertemperatur eine energieintensive Angelegenheit.

Diese Überlegung liefert den Schlüssel zum Verständnis des Energieumsatzes von Warmblütern. Sie führen einen ständigen Kampf gegen den Wärmeverlust. Hier können wir mit einer quantitativen Diskussion ansetzen. Die Wärmeabgabe an die Umgebungsluft wird durch die Gleichung

$$\frac{Q}{t} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T \qquad (4)$$

beschrieben, wobei α der Wärmeübergangskoeffizient Körper/Luft ist. Sie hat eine ähnliche Form wie Gleichung (3), nur dass in diesem Fall die Wärmeleitung durch das Körpergewebe vernachlässigt werden kann, weil der Wärmeübergang vom Körper zur Luft der begrenzende Faktor ist. (Wenn weder Wärmeleitung noch Wärmeübergang vernachlässigt werden können, nimmt die Gleichung die Form $Q/t = k \cdot A \cdot \Delta T$ an, wobei $1/k = 1/\alpha + d/\lambda$ ist).

An Gleichung (4) kann man nun schon die entscheidende Abhängigkeit ablesen: Die abgegebene Wärme ist proportional zu *A*, also zur *Körperoberfläche* des Tieres. Nicht das Volumen ist entscheidend, sondern die Oberfläche (vgl. z. B. [8,9]). Wenn die mit der Nahrung aufgenommene Energie wirklich hauptsächlich zum Aufrechterhalten der Körpertemperatur benötigt wird, gilt:

Der Energieumsatz eines Tieres ist proportional zu seiner Körperoberfläche.

Um den Energieumsatz verschiedener Tiere numerisch abschätzen zu können, setzen wir das folgende Modell an: 1. Für alle betrachteten Tiere ist der Temperaturunterschied ΔT zwischen Körper und Umgebung gleich. 2. Der Wärmeübergangskoeffizient ist für alle betrachteten Tiere gleich (damit schließen wir z. B. den im vorangegangenen Abschnitt betrachteten

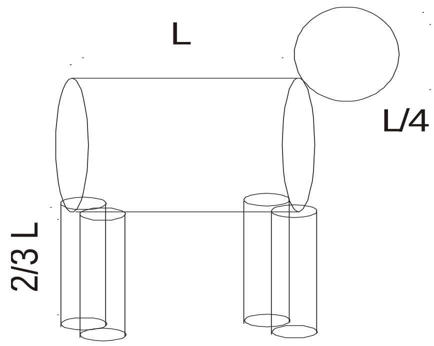

Abb. 1: Modell eines Tieres

Blauwal aus). 3. Die Körperoberfläche lässt sich durch das in Abb. 1 skizzierte Modell beschreiben.

Wir vereinfachen uns die Abschätzung der Körperoberfläche indem wir einen einheitlichen Bauplan für alle Tiere festlegen, der nur durch einen einzigen Parameter, die Rumpflänge L beschrieben wird. Alle anderen Abmessungen werden durch L ausgedrückt. Wir denken uns ein Tier zusammengesetzt aus einem Zylinder mit Länge L und Durchmesser $L/3$ (Rumpf), vier Zylindern mit Länge 2/3 L und Durchmesser $L/6$ für die Beine und einer Kugel mit Durchmesser $L/4$. Berechnet man die Oberfläche und das Volumen dieses Modelltieres findet man:

$$A = 2{,}8\,L^2, \qquad V = 0{,}11\,L^3. \tag{5}$$

Nehmen wir als Bezugstier den Hund, für den L ≈ 0,5 m ist und der einen Energieumsatz von P_{Hund} = 1885 kJ / Tag hat [8]. Dann gilt mit den eben getroffenen Annahmen für den Energieumsatz P_{Tier} eines warmblütigen Tiers:

$$\begin{aligned}
P_{\text{Tier}} &= P_{\text{Hund}} \cdot \frac{A_{\text{Tier}}}{A_{\text{Hund}}} \\
&= P_{\text{Hund}} \cdot \frac{2{,}8\,L_{\text{Tier}}^2}{2{,}8\,L_{\text{Hund}}^2} \\
&= 1885\,\text{kJ/Tag} \cdot \frac{L_{\text{Tier}}^2}{(0{,}5)^2\,\text{m}^2} \\
&= 7540\,\text{kJ/Tag} \cdot \left(\frac{L_{\text{Tier}}}{1\text{m}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Dies ist das Ergebnis unseres Fermiproblems. Mit dieser Formel sind wir in der Lage, den Energieumsatz von Mäusen, Pferden und Elefanten auszurechnen. Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse und vergleicht sie mit den gemessenen Werten (aus [8,10]). Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend. Die Proportionalität des Energieumsatzes zur Körperoberfläche scheint in der Natur näherungsweise realisiert zu sein. Auffällig ist die starke Abweichung im Fall des Schafs, die aber sofort erklärlich wird, wenn man an die Voraussetzung gleicher Wärmeübergangskoeffizienten denkt. Sie ist wegen des dicken Fells der Schafe nicht erfüllt. Wenn uns die Tierart „Schaf" unbekannt wäre, könnt man aus dem Vergleich von errechnetem und gemessenem Wert auf eine gute Wärmeisolierung dieser Spezies schließen.

Tierart	L / m	errechneter Energieumsatz	tatsächlicher Energieumsatz
Maus	0,05	18,9 kJ/Tag	20,0 kJ/Tag
Ratte	0,12	109 kJ/Tag	122 kJ/Tag
Katze	0,3	679 kJ/Tag	828 kJ/Tag
Schimpanse	0,8	4825 kJ/Tag	4600 kJ/Tag
Schaf	1	7540 kJ/Tag	4670 kJ/Tag (!)
Mensch	1	7540 kJ/Tag	7190 kJ/Tag
Pferd	2	30 000 kJ/Tag	34 640 kJ/Tag
Elefant	6	271 000 kJ/Tag	130 600 kJ/Tag

Bemerkenswert ist auch, dass der Vorfaktor 2,8 in unserer Flächenabschätzung in der obigen Formel herauskürzt. Das Ergebnis hängt also überhaupt nicht von den Details dieses spezifischen Modells ab, sondern nur von der Proportionalität der Körperoberfläche zu L^2.

In der Biologie ist der Zusammenhang zwischen Energieumsatz und Körperoberfläche gut bekannt [8]. Meist wird der Energieumsatz nicht als Funktion der Länge L, sondern des Körpermasse m ausgedrückt. Trägt man den Energieumsatz gegen m auf, erhält man die sogenannte „Mouse-to-elephant curve" (Abb. 2). Alle eingetragenen Tiere, vom größten bis zum kleinsten, liegen in der Nähe dieser Kurve.

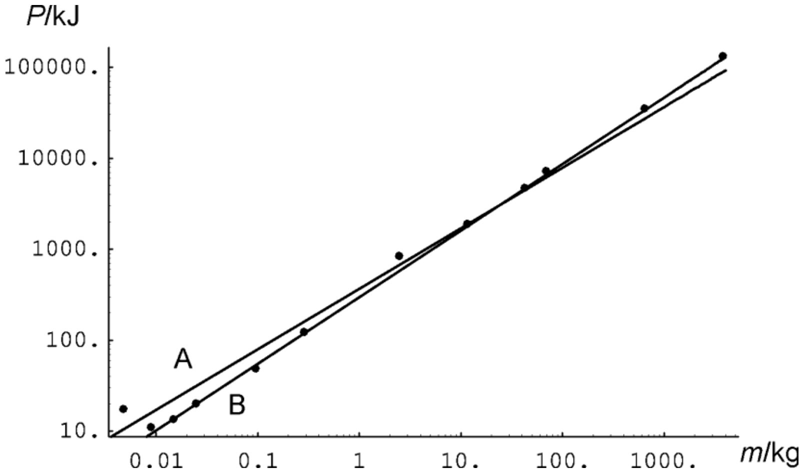

Abb. 2
„Mouse- to-elephant curve": Der Grundumsatz von Tieren wird gegen ihre Masse aufgetragen. Die beiden eingezeichneten Kurven entsprechen der Vorhersage von Gl. (6) (Kurve A) und (7) (Kurve B).

Auch diese Kurve können wir mit unserem Modell reproduzieren. Wir müssen den Energieumsatz nur als Funktion der Körpermasse ausdrücken. Dazu schreiben wir für unser Modelltier die Körperoberfläche als Funktion des Volumens (s. Gleichung (5)): $A = 42{,}6\ V^{2/3}$. Wir nehmen an, dass unser Tier die Dichte von Wasser besitzt und können so schreiben: $A = 0{,}426\ \mathrm{m}^2\ (m_{\mathrm{Tier}}\ /\ \mathrm{kg})^{2/3}$. Nun gehen wir analog zu oben vor und setzen für den Hund eine Masse von 12 kg ein. Damit erhalten wir das Ergebnis:

$$P_{\mathrm{Tier}} = 360\,\mathrm{kJ/Tag} \cdot \left(m_{\mathrm{Tier}}\,/\,\mathrm{kg}\right)^{2/3}. \qquad (6)$$

Dies ist unsere Vorhersage für die „Mouse-to-elephant curve", die mit wenigen Annahmen allein aus der Notwendigkeit hergeleitet wurde, eine konstante Körpertemperatur aufrecht zu erhalten. Die von den Biologen gegenwärtig benutzte Formel, die eine beste Anpassung an die empirischen Daten liefert, lautet:

$$P_{\text{Tier}} = 295\,\text{kJ/Tag} \cdot \left(m_{\text{Tier}}\,/\,\text{kg}\right)^{0{,}7325}. \qquad (7)$$

Der Exponent ist vom Wert 2/3 verschieden, d. h. die Proportionalität des Energieumsatzes zur Körperoberfläche ist nicht perfekt.

5. Wie viel fraß ein Dinosaurier?

Die Tatsache, dass der Energieumsatz für alle Warmblüter durch ein einheitliches Gesetz beschrieben wird, ist schon bemerkenswert genug. Man kann diesen Zusammenhang aber benutzen um weiteren interessanten Fragestellungen nachzugehen. In den siebziger Jahren entbrannte unter den Paläontologen eine Debatte über die Frage, ob Dinosaurier Warmblüter oder Kaltblüter waren. Direkt lässt sich die Frage nicht klären, weil man ihre Körpertemperatur oder ihren Nahrungsverbrauch nicht mehr messen kann. Aber es gibt eine Reihe von Hinweisen, die die Hypothese der Warmblütigkeit stützen [11]: Aus Gebiss und Knochenbau lässt sich für einige Dinosaurierarten auf eine hohe Aktivität schließen, was den Stoffwechsel eines Warmblüters voraussetzt. Der Knochenaufbau zeigt manchmal eine konzentrische Anordnung von Kanälen für die Blutversorgung, wie es für Säugerknochen üblich ist. Und schließlich hatten einige Arten einen so langen Hals, dass das Gehirn mehrere Meter über dem Herz saß. Um das Gehirn mit Blut zu versorgen, war wohl ein gekammertes Herz notwendig, wie es Tiere mit hoher Stoffwechselaktivität (Vögel und Säugetiere) besitzen.

Ein Argument, das gegen diese Hypothese spricht, ist der hohe Energiebedarf von Warmblütern. Man fragt sich [12]: „Wäre es wirklich möglich, durch den kleinen Kopf von *Seismosaurus* oder *Diplodocus* so viel Nahrung zu stopfen, dass ein Ofen beschickt wird, der ausreicht, um dreißig bis fünfzig Tonnen zu wärmen?“ Dies ist die Frage, die wir am Beispiel von *Brachiosaurus* als Fermiproblem beantworten wollen:

Wie viel musste ein Brachiosaurus am Tag fressen, falls er ein Warmblüter war?

Brachiosaurus (Abb. 3) ist der größte und schwerste Dinosaurier, von dem bisher ein vollständiges Skelett vorliegt. Er wurde bis zu 23 m lang und hatte eine Masse von ca. 80 Tonnen. Früher dachte man, dass er aufgrund dieser gewaltigen Masse nur im Wasser leben könnte. Berechnungen zeigten, dass er aufgrund des hohen Wasserdrucks kaum hätte atmen können. Heute nimmt man an, dass er an Land gelebt hat und mit seinem langen Hals (Kopfhöhe 12 m) wie eine Giraffe die Gipfel der Bäume abgeweidet hat.

Um seinen Energieumsatz abzuschätzen, greifen wir auf die „Mouse-to-elephant curve“ aus dem letzten Abschnitt zurück und nehmen an, dass der Stoffwechsel von Brachiosaurus ebenfalls dieser Gesetzmäßigkeit folgte – sofern er ein Warmblüter war. Mit einer Masse von 80 Tonnen erhalten wir aus der Formel (7) einen Energieumsatz von $1{,}2 \cdot 10^6$ kJ/Tag. Das ist ein erstes Ergebnis:

Ein Brachiosaurus hatte einen Energieumsatz von $1{,}2 \cdot 10^6$ kJ/Tag.

Das ist weniger als beim Blauwal. Allerdings hatte *Brachiosaurus* auch nicht die Möglichkeit, einfach Unmengen von Wasser nach Verwertbarem durchzusieben. Er musste aktiv Blätter fressen.

Wie groß ist der Blätterberg, den ein Brachiosaurus pro Tag zu sich nehmen musste? Im späten Jura gab es kaum nährstoffreiche Bedecktsamer, also musste sich Brachiosaurus von den cellulosereichen Blättern der Palmen und Nadelbäume ernähren, die damals vorherrschend waren [11]. Eine stark cellulosehaltige Nahrung würde, ähnlich wie heute bei Kühen und Pferden, die Anwesenheit von celluloseabbauenden Bakterien im Verdauungstrakt von Brachiosaurus notwendig machen.

Bei der Abschätzung der von *Brachiosaurus* verzehrten Nahrungsmenge können wir nicht nach unserer bisherigen Strategie vorgehen und die Nährwertdaten aus der Kalorientabelle im Kochbuch entnehmen. Blätter findet man dort nicht, denn der Mensch kann Cellulose nicht verwerten. Wir müssen also versuchen, aus der Nahrungsmenge eines celluloseverdauenden Tieres auf den Nährwert zu schließen. Wir wählen das Pferd und nehmen an, dass die pflanzenfressenden Dinosaurier einen ähnlichen Nährwertanteil aus ihrer Nahrung extrahieren konnten wie das Pferd aus Gras.

Pferde haben einen Energieumsatz von 35 000 kJ pro Tag (s. Tabelle 1) und fressen bei Weidehaltung etwa 40 kg Grünfutter (Gras) pro Tag. Für 1 kJ Energieumsatz müssen also 1,14 g Gras gefressen werden. Für *Brachiosaurus* mit einem Energieumsatz von $1{,}2 \cdot 10^6$ kJ/Tag können wir damit auf eine Futtermenge von 1370 kg pro Tag fressen. Das ist das Ergebnis unserer Abschätzung:

Falls Brachiosaurus ein Warmblüter war, musste er 1370 kg Grünfutter pro Tag fressen.

Zu einem Wert in der gleichen Größenordnung kommt man, wenn man vom Elefanten ausgeht, der eine ähnlich geartete Ernährungsweise hat und bei einem Energieumsatz von 130 000 kJ/Tag eine Nahrungsmenge von 100 – 200 kg zu sich nimmt.

Was bedeutet dies für die Debatte um die Warmblütigkeit der Dinosaurier? Ist es möglich, dass *Brachiosaurus* tatsächlich so viel gefressen hat? Gehen wir von einer täglichen Fresszeit von 12 Stunden aus, so musste er in jeder Minute 2 kg Blätter fressen. Das ist zwar noch denkbar, liegt aber gerade an der Grenze des Möglichen. Es ist also kein Wunder, dass die Natur kaum größere Dinosaurier als *Brachiosaurus* hervorgebracht hat.

In der Fachwelt ist inzwischen die Meinung vorherrschend, dass sich die Dinosaurier einer Klassifizierung in Warm- und Kaltblütigkeit entziehen. Man glaubt, dass ihr Organismus wie die Kaltblüter eine veränderliche Stoffwechselaktivität besaß, dass sie aber durchaus einer aktiven Steuerung der Stoffwechselrate fähig waren. Doch vermutlich ist das letzte Wort in dieser Angelegenheit noch nicht gesprochen, und um so bemerkenswerter ist es, dass man in dieser Debatte, deren Inhalt für die Schülerinnen und Schüler motivierend ist, mit einfachsten physikalischen Gesetzmäßigkeiten einen Beitrag leisten kann.

[1] D. Furjanic, R. Müller, *Fermiprobleme im praktischen Einsatz*, in diesem Heft.

[2] http://home.germany.net/100-186279

[3] Y. A. Cengel: *Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1997).

[4] Dr. Oetkers Schulkochbuch, Bielefeld (1987).

[5] http://home.germany.net/100-186279/verh.htm#Ernä

[6] R. Müller, *Eiffelturm, Schwimmbad und Sonne – Fermiprobleme in der Wärmelehre*, in diesem Heft.

[7] http://www.enchantedlearning.com/subjects/whales/species/Bluewhale.shtml

[8] R. Eckert, D. Randall, *Animal Physiology*, Freeman, San Francisco (1983).

[9] H.-J. Schlichting, B. Rodewald, *Von großen und kleinen Tieren*, PdN/Ph 37/5, 2 (1988).

[10] R. Flindt, *Biologie in Zahlen*, Spektrum Akdemischer Verlag, Heidelberg (^{5}2000).

[11] Encyclopaedia Britannica, CD-ROM Edition 1999, Artikel *Dinosaurs*.

[12] R. Fortey, Leben. Eine Biographie, C. H. Beck, München (1999).