

56. Thermodynamische Relationen und Fluktuationen (0 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Enthalpie $I(S, P, N)$ mit $dI = T dS + V dP + \mu dN$ folgende Beziehungen gelten:

(a)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_{V,N} = C_V + \frac{\alpha V}{\kappa_T} \quad (1)$$

(b)

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{\alpha T - 1}{\kappa_T} \quad (2)$$

Verwenden Sie für diese Rechnung die Legendre-Transformierte der inneren Energie E anstelle der Enthalpie I . Eventuell hilft Ihnen dann nachfolgende Beziehung, die bei Verwendung allerdings nachgewiesen werden müsste:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} - P \quad (3)$$

Dabei sind α und κ_T gegeben durch $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$ und $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$.

57. Lenoir-Kreisprozess (0 Punkte)

Der erste funktionstüchtige Gasmotor wurde von Lenoir erfunden und wird durch den gleichnamigen Kreisprozess beschrieben. Dieser besteht aus den folgenden Schritten:

- $A \rightarrow B$: Isochore Erwärmung
- $B \rightarrow C$: Adiabatische Expansion
- $C \rightarrow A$: Isobare Abkühlung

Dieser Prozess soll mit einem idealen Gas betrieben werden.

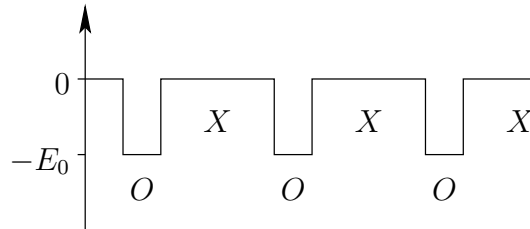
- (a) Skizzieren Sie den Prozess im (S, T) -Diagramm und im (P, V) -Diagramm. Geben Sie die funktionalen Abhängigkeiten in den einzelnen Teilschritten an.
- (b) Bestimmen Sie die übertragene Wärme und die geleistete Arbeit bei den drei Schritten (als Funktion der Volumina und Temperaturen an den drei Eckpunkten).
- (c) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad η dieser Maschine gegeben ist durch

$$\eta = 1 - \gamma \frac{T_B \cdot \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} - T_A}{T_B - T_A} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (4)$$

wobei C_v und C_p die spezifische Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen bzw. Druck sind.

58. **Gittergas in einer Dimension (0 Punkte)**

Betrachten Sie einen eindimensionalen Kristall aus N gleichen Atomen. Die Atome befinden sich an den Gitterplätzen O mit der Energie $\varepsilon = -E_0$. Die Atome können nun auf einen von zwei benachbarten Zwischengitterplätzen X mit der Energie $\varepsilon = 0$ angeregt werden.



- Berechnen Sie die Entropie der Zustände, bei denen sich n Atome auf Zwischengitterplätzen befinden. Es gilt $1 \ll n \ll N$. Wegen $n \ll N$ können Sie vernachlässigen, dass zwei benachbarte Atome auf denselben Zwischengitterplatz angeregt werden könnten.
- Wiederholen Sie Ihre Berechnung der Entropie aus (58a), wobei die nicht besetzten Plätze (Löcher) im O -Gitter nicht mit den besetzten Zwischengitterplätzen korreliert sein sollen. D. h. die Atome können auch auf andere als die *direkt benachbarten* Zwischengitterplätze angeregt werden.

59. **Virialentwicklung (0 Punkte)**

Die Wechselwirkung der Teilchen eines Gases werde näherungsweise durch folgendes Potential beschrieben:

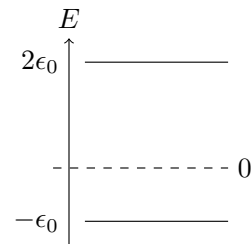
$$w(r) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } r \leq d \\ r - 2d & \text{wenn } d < r \leq 2d \\ 0 & \text{wenn } 2d < r \end{cases} \quad (5)$$

- Skizzieren Sie das angegebene Potential.
- Berechnen Sie für dieses Potential den (klassischen) zweiten Virialkoeffizienten.
- Stellen Sie damit die Zustandsgleichung $P = P(N, V, T)$ auf.
- Berechnen Sie dann die Energie $E = E(N, V, T)$ und die spezifische Wärme C_v in gleicher Ordnung.

60. Fermionen (0 Punkte)

Betrachten Sie Fermionen ohne Spin mit folgendem Energieschema:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\epsilon_0 \\ E_2 &= 2\epsilon_0 \\ \epsilon_0 &> 0 \end{aligned}$$



- (a) Geben Sie die Besetzungszahl $N(T, \mu)$ für dieses Energieschema an.
- (b) Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur T so, dass die Besetzungszahl $N(T, \mu) = 1$ ist.
 Hinweis: Sie können sich viel Schreibarbeit mit der Ersetzung $a = e^{\epsilon_0/(k_B T)}$ und $x = e^{-\mu/(k_B T)}$ sparen.

61. Spin im Magnetfeld (0 Punkte)

Betrachten Sie einen Spin $S \in \mathbb{N}$ (mit $\hbar \equiv 1$) im Magnetfeld h mit Hamiltonoperator $H = -\hat{S}^z h$. H hat somit die Eigenwerte $-Sh, (-S+1)h, (-S+2)h, \dots, (S-1)h, Sh$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme Z gegeben ist durch

$$Z = \frac{\sinh\left(\beta h \left(S + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \quad (6)$$

mit der inversen Temperatur β .

Hinweis: Nutzen Sie die endliche geometrische Reihe $\sum_{n=0}^m q^n = (1 - q^{m+1})/(1 - q)$.

- (b) Welchen Wert nimmt Z für $\beta h S \rightarrow 0$ an? Welche physikalische Bedeutung hat dies?
- (c) Zeigen Sie, dass für die 'Magnetisierung' $M = \langle \hat{S}^z \rangle$ gilt

$$M = \left(S + \frac{1}{2}\right) \coth\left(\beta h \left(S + \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta h}{2}\right) \quad (7)$$

- i. Berechnen Sie M im Grenzfall $\beta h \rightarrow \infty$.
 Welche physikalische Bedeutung hat Ihr Ergebnis?
- ii. Entwickeln Sie M im Grenzfall $\beta h \ll 1$ in 1. Ordnung in βh .
 Welche magnetische Suszeptibilität χ mit $M = \chi h$ erhalten Sie daraus?
 Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$
- (d) Leiten Sie die magnetische Suszeptibilität für $h = 0$ mittels des Schwankungsquadrats $\langle (\Delta \hat{S}^z)^2 \rangle$ her.
 Hinweis: Beachten Sie, dass die Richtungen x, y, z in diesem Fall äquivalent sind.