



Abgabe: Di., 15.02.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter <https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v>.

Bitte nehmen Sie an der Evaluation der Lehrveranstaltung teil. Den Link finden Sie in Stud.IP.

51. **Wissensfragen (2 Punkte)**

(a) Was sind Phononen? Welcher Verteilungsfunktion unterliegen sie?

52. **Einstein-Phononen (4 Punkte)**

In Festkörpern mit mehr als einem Atom pro Gitterpunkt treten neben den in der Vorlesung behandelten akustischen Phononen, die mit der Debye-Theorie näherungsweise beschrieben werden, noch optische Phononen auf. Die einfachste Beschreibung der optischen Phononen geht auf Einstein zurück und geht von einer Phononenzustandsdichte $\Omega(\omega) = 3N\delta(\omega - \omega_E)$ aus (ω_E ist eine konstante Frequenz, N ist die Gesamtzahl der Atome).

(a) Berechnen Sie die mittlere Energie der Phononen.

(b) Berechnen Sie die spezifische Wärme. Zeigen Sie, dass sich die Phononen bei hohen Temperaturen gemäß der Regel von Dulong und Petit verhalten.

53. **Pauli-Paramagnetismus (15 Punkte)**

In einem äußeren Magnetfeld sind die Einteilchenenergien eines nicht wechselwirkenden Fermigas $\epsilon_\sigma(p)$ für die beiden Spinrichtungen $\sigma = \pm 1$ (parallel oder antiparallel zum Magnetfeld) unterschiedlich:

$$\epsilon_\sigma(p) = \frac{p^2}{2m} - \sigma\mu_B B. \quad (1)$$

Wobei μ_B das Bohr'sche Magneton ist. Für beide Spineinstellungen ergeben sich damit unterschiedliche Besetzungszahlen $\langle n_\sigma(p) \rangle$ bei gleichem chemischen Potential μ . Die Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = \mu_B (\langle N_+ \rangle - \langle N_- \rangle) \quad \text{mit} \quad N_\sigma = \sum_p n_\sigma(p) \quad (2)$$

und

$$\chi = \chi(T, B) = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{T, N} \quad (3)$$

(a) Zeigen Sie $\chi(T, B \rightarrow 0) = \mu_B^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \Omega'(\epsilon) n(\epsilon)$, wobei $\Omega(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $n(\epsilon)$ die Fermiverteilung zum chemischen Potential $\mu(T)$ ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sommerfeldentwicklung $\mu(T) = \epsilon_F - \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12\epsilon_F}$ für ein Elektronengas mit $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Fermienergie ϵ_F .

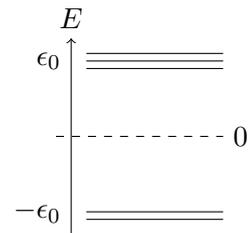
Hinweis: Drücken Sie die Zustandsdichte $\Omega(\epsilon)$ durch die Energie ϵ , die Fermienergie ϵ_F und die Teilchenzahl N aus.

(c) Entwickeln Sie mit der Sommerfeld'schen Methode $\chi(T, 0)$ bis zur Ordnung T^2 . Die Gesamtteilchenzahl N ist natürlich vorgegeben, sodass die in Aufgabenteil (53b) berechnete Temperaturabhängigkeit von μ zu berücksichtigen ist.

54. **Fermionen in einem entarteten Zwei-Niveau-System (8 Punkte)**

Wir betrachten Fermionen ohne Spin mit folgendem Energieschema:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= -\epsilon_0 \\ E_3 = E_4 = E_5 &= \epsilon_0 \\ \epsilon_0 &> 0 \end{aligned}$$



Beachten Sie, dass jeweils $E_{1,2}$ und $E_{3,4,5}$ entartet sind.

- Geben Sie die Besetzungszahl $N(T, \mu)$ für dieses Energieschema an.
- Bestimmen Sie das chemische Potential $\mu(T)$ als Funktion der Temperatur T so, dass die Besetzungszahl $N(T, \mu) = 1$ ist.
Hinweis: Sie können sich viel Schreibarbeit mit der Ersetzung $a = e^{\epsilon_0/(k_B T)}$ und $x = e^{-\mu/(k_B T)}$ sparen.
- Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\mu(T)$ für kleine $T \ll \epsilon_0/k_B$ und für große $T \gg \epsilon_0/k_B$.
- Skizzieren Sie $\mu(T)$.

55. **Weißer Zwerge (4 Punkte)**

Weißer Zwerge sind das „Endstadium“ von Sternen in denen sämtliche Fusionsprozesse aufgehört haben. Sie können als Fermigas bei $T \approx 0$ mit den zugehörigen Ionenrümpfen angesehen werden. Die Statistik der Ionen bleibt unberücksichtigt.

Zeigen Sie, dass für den Druck P_e im Elektronengas

$$P_e = \frac{\hbar^2}{15m_e\pi^2} (3\pi^2\rho_e)^{5/3} \quad (4)$$

gilt, wobei m_e die Elektronenmasse und ρ_e die Dichte des Elektronengases ist.

Nehmen Sie an, die Dichte des Elektronengases beträgt $\rho_e \approx 1 \times 10^{40} \text{ m}^{-3}$. Geben Sie den Druck des Elektronengases an. Warum ist ein weißer Zwerg trotzdem stabil?