INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

12. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

30. Freier zentraler Fall in der Schwarzschild-Metrik

Der zentrale Fall eines massiven Körpers soll untersucht werden.

(a) Zeigen Sie zunächst

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{c}{\sqrt{3}}\sqrt{3\frac{r_G}{r} - 1} \tag{1}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r_G}{r}\right)\sqrt{3\frac{r_G}{r} - 1} \quad , \tag{2}$$

wenn der zentrale Fall mit der Geschwindigkeit null bei $r(\tau = 0) = 3r_G$ beginnt.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1). Skizzieren Sie $r(\tau)$. Wie lange benötigt der Körper für den Sturz ins Zentrum?

(c) Lösen sie die Differentialgleichung (2) bei $r \approx r_G$ indem Sie die rechte Seite bei $r = r_G$ in eine Taylor-Reihe bis zur linearen Ordnung entwickeln und dann die resultierende lineare Differentialgleichung lösen. Was beobachtet ein entfernter Beobachter mit der Zeit t bei Annäherung des Körpers an r_G?

31. Gravitationsfeld der rotierenden Erde

Analog zum Magnetfeld einer rotierenden Ladungsverteilung erzeugt auch eine rotierende Massenverteilung ein *gravitomagnetisches* Feld. Dieses Feld soll nun für die rotierende Erde bestimmt werden. Betrachten Sie den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit.

(a) Begründen Sie, warum das Problem in linearer Näherung betrachtet werden kann. Schreiben Sie die Differentialgleichung für die f_{mn} unter diesen Bedingungen auf.

(b) Begründen Sie, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$f_{mn}(\underline{r}) = \frac{4\gamma}{c^4}\int \frac{T_{mn} - \frac{T}{2}\eta_{mn}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3r' \tag{3}$$

lautet. Erinnern Sie sich an die retardierten Potentiale der Elektrodynamik.

(c) Geben Sie $S_{mn} := T_{mn} - \frac{T}{2}\eta_{mn}$ an für den Fall eines druckfreien Mediums konstanter Massendichte, also $T_{mn} = \rho u_m u_n$ mit $\rho = const$, $u_m = (v_1, v_2, v_3, -c)$. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung $\mathcal{O}(v^2/c^2)$.

(d) Bestimmen Sie die f_{mn} und geben Sie die Metrik der rotierenden Erde für $r > R_E$ an.

Bitte wenden→

32. **Verhältnis von Umfang zu Durchmesser für die Erdbahn**

Die Bahn der Erde um die Sonne sei eine Kreisbahn mit der radialen Koordinate $r = R$. Das Gravitationsfeld der Sonne werde im Bereich $r < R_\odot$ durch die innere Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G r^2}{R_\odot^3}} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right) - \left\{ \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_G}{R_\odot}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r_G r^2}{R_\odot^3}} \right\}^2 dct^2$$

und im Bereich $r \geq R_\odot$ durch die äußere Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right) - \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) dct^2$$

beschrieben. Die Dichte der Sonne sei homogen. Berechnen Sie das Verhältnis von Umfang U zu Durchmesser D der Erdbahn. Es sollte kleiner als π sein!

Die Parameter sind:

- Sonnenradius $R_\odot = 7 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$
- Schwarzschildradius $r_G = 3\,\mathrm{km}$
- Erdbahn $R = 1\,\mathrm{AU} = 1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$
- Dichte $\varrho_0 = 1.4\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$

Hinweis: Gehen Sie von der metrischen Fundamentalgleichung für die Schwarzschildmetrik aus. Der Umfang U ergibt sich aus

$$U = \int ds|_{r=R,\vartheta=\frac{\pi}{2},\varphi=(0,2\pi),t=const} \tag{4}$$

und der Durchmesser D

$$D = 2\int ds|_{r=(0,R),\vartheta=const,\varphi=const,t=const} \tag{5}$$