Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 08.02.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

47. **Wissensfragen (2 Punkte)**

    (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion in großkanonischer Gesamtheit für die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ eines Niveaus in einem System bestehend aus (i.) Fermionen und (ii.) Bosonen an. Wie heißen die Funktionen?

48. **Thermodynamische Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes (10 Punkte)**

    Neben der in der Vorlesung gezeigten statistischen Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes gibt es noch eine rein thermodynamische. Hierzu wird zunächst der Zusammenhand $3PV = E$ klassisch hergeleitet.
    Betrachten Sie einen Hohlraumstrahler mit Volumen V, Photonenzahl N und Gesamtenergie E.

    (a) Betrachten Sie den (elastischen) Stoß eines Photons an einer Wand des Hohlraums.
    Berechnen Sie den Impulsübertrag pro Zeitintervall in Abhängigkeit der Einfallswinkel φ und ϑ.

    (b) Berechnen Sie außerdem die Zahl der pro Zeitintervall mit der Wand (Fläche A) unter den Winkeln φ und ϑ stoßenden Photonen.

    (c) Mitteln Sie nun den Gesamtimpulsübertrag über den Raumwinkel und zeigen Sie so $3PV = E$.

    (d) Zeigen Sie, dass
    $$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \tag{1}$$
    gilt.

    (e) Nehmen Sie an[1], dass sich die Energie als $E = Vf(T)$ schreiben lässt.
    Benutzen Sie dies und Ihre vorherigen Resultate, um das Stefan-Boltzmann-Gesetz bis auf eine Konstante zu erhalten.

49. **Entropie von Quasibosonen (6 Punkte)**

    Betrachten Sie ein System mit quasi-bosonischen Anregungen, denen ein Impuls $\mathbf{p}$ und ein Spin s zugeordnet werden kann.
    Zeigen Sie ausgehend von der freien Energie
    $$F = -kT \ln \sum_{n_s(\mathbf{p})} \exp\left(-\beta E\{\cdots n_s(\mathbf{p})\cdots\}\right) \tag{2}$$
    mit Temperatur T, Boltzmann-Konstante k, $\beta = 1/kT$ und Besetzungszahlen $n_s(\mathbf{p})$ der Zustände, sowie der Energie $E\{\cdots n_s(\mathbf{p})\cdots\}$, abhängig von den Besetzungszahlen, dass die Entropie der Quasibosonen gegeben ist durch
    $$S = -k \sum_{\mathbf{p},s} \left[\langle n_s(\mathbf{p})\rangle \ln\langle n_s(\mathbf{p})\rangle - (1 + \langle n_s(\mathbf{p})\rangle)\ln(1 + \langle n_s(\mathbf{p})\rangle)\right] . \tag{3}$$
    Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der aus der Vorlesung bekannten Entropie für Quasifermionen.

Bitte wenden! →

[1] Da es sich um ein System freier Teilchen handelt, können intensive Zustandsgrößen wie die Energiedichte nur von der Temperatur abhängen.

50. **Bose-Einstein-Kondensation (12 Punkte)**

Wir betrachten ein verdünntes Gas aus Bosonen in dem Wechselwirkungen zwischen den Bosonen in niedrigster Ordnung vernachlässigt werden können. Betrachten wir das System im großkanonischen Ensemble, ergibt sich die Besetzungszahl der einzelnen Zustände aus der Bose-Verteilung zu

$$\langle n(\mathbf{p})\rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon(\mathbf{p})-\mu)]-1}\,, \tag{4}$$

dabei ist $\mathbf{p}$ der Impuls eines Zustands, $\epsilon(\mathbf{p})$ die Energie eines Teilchens in diesem Zustand, $\beta = 1/(k_B T)$ die inverse Temperatur und μ das chemische Potential.
Die Gesamtzahl der Teilchen im System lautet entsprechend

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \langle n(\mathbf{p})\rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon(\mathbf{p})-\mu)]-1}\,. \tag{5}$$

(a) Was ergibt sich für die Besetzungszahlen der einzelnen Zustände im Limes $T \to 0$?
Was lässt sich über μ in diesem Fall sagen, wenn das System gerade N Teilchen enthalten soll?

(b) Nehmen Sie an, dass es sich bei dem System um einen dreidimensionalen unendlichen Potentialtopf handelt. Überführen Sie die Summe in Glg. (5) in ein Integral und berechnen Sie so die Anzahl der Teilchen in **angeregten** Zuständen unter der Annahme, dass $\mu \to \epsilon_0$, wobei ϵ_0 die Grundzustandsenergie des Systems ist.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Zustandsdichte aus Aufgabe 8.

(c) Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, unterhalb derer die Besetzungszahl des Grundzustandes $\langle n(\mathbf{0})\rangle$ makroskopisch wird.
Bestimmen Sie außerdem den kritischen Exponenten γ für die Besetzung des Grundzustandes. Es soll gelten:

$$\langle n(\mathbf{0})\rangle = N\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{\gamma}\right) \tag{6}$$

(d) Wiederholen Sie die Aufgabenteile 50b und 50c qualitativ für ein verdünntes Bosegas in folgenden Systemen:

i. Zweidimensionaler unendlicher Potentialtopf
ii. Zweidimensionales harmonisches Potential
iii. Dreidimensionales harmonisches Potential

In welchen Fällen tritt Bose-Einstein-Kondensation auf? Wie lautet in diesen Fällen der kritische Exponent?

Hinweis: Für die Bestimmung der kritischen Temperatur T_c ist der Wert des folgenden Integrals nützlich: $\int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{e^x-1} = \Gamma(a)\zeta(a)$.
Einige Werte der Riemannschen ζ-Funktion lauten: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) \approx 1.202$, $\zeta(3/2) \approx 2.61$. Die Werte der Γ-Funktion finden Sie in Aufgabe 8.