Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

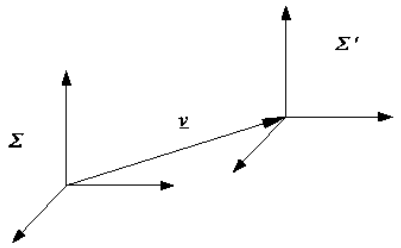
ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE WS 2021/22

8. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

20. Lorentz-Transformation



Zwei Minkowski-Systeme Σ und Σ' sind achsenparallel ausgerichtet, der konstante Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}$ der Relativbewegung habe jedoch beliebige Richtung (vgl. Abbildung).

(a) Beweisen Sie die Lorentz-Transformationsformel

$$L^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} \delta^a_b + \beta \frac{u^a}{c} \frac{u_b}{c} & -\frac{u^a}{c} \\ -\frac{u_b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \quad , \tag{1}$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit

$$u^i := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} v^a \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

und

$$\beta := \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \frac{c^2}{v^2} \quad , \tag{3}$$

sowie der Standard-Notation $a, b = 1, 2, 3$; $i, j = 1, \ldots, 4$.

(b) Verifizieren Sie, dass Gleichung (1) im Spezialfall $\underline{v} = v\,\underline{e}_1$ in die spezielle Lorentz-Transformationsformel (E-Dynamik-Skript III.90) übergeht.

21. **Energie-Impuls-Tensor**

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit hat im Riemann-Raum die Form

$$T^{ik} = \left(\rho_0 + \frac{P_0}{c^2}\right) u^i \, u^k + g^{ik} P_0 \tag{4}$$

und die Feldgleichungen unter dem Einfluss einer äußeren Kraftdichte k^i lauten

$$T^{ik}{}_{||k} = k^i \quad , \tag{5}$$

wobei ρ_0, P_0, u^i die Ruhmassendichte, den Eigendruck und die Vierer-Geschwindigkeit darstellen.

(a) Formulieren Sie die beiden Gleichungen im Lokalen Inertialsystem (LIS).

(b) Machen Sie die beiden Gleichungen im LIS plausibel, indem Sie als nichtrelativistischen Grenzfall die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichung extrahieren.

(c) Zeigen Sie, dass der Energie-Impuls-Tensor im LIS eindeutig ist, wenn von den vertrauten Bedingungen im Ruhsystem ausgegangen wird.

22. **Laplace-Operator**

(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator eines Tensors nullter Stufe f allgemein durch

$$\partial^2_{\underline{x}} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\xi^b} \left(\sqrt{g}\, g^{ab}\, \partial_{\xi^a} f\right) \tag{6}$$

dargestellt werden kann, wobei g die Determinante des metrischen Fundamentaltensors g_{ab} bezeichnet. Gehen Sie dazu von

$$\partial^2_{\underline{x}} f = g^{ab} f_{||a\,||b} \tag{7}$$

aus.

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Gleichung (6), dass der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) = (r, \theta, \varphi)$ durch

$$\partial^2_{\underline{x}} f = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r f\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta\, \partial_\theta f\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial^2_\varphi f \tag{8}$$

gegeben ist.