



7. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

18. Berechnung von Krümmungstensoren, Ricci-Tensoren, Krümmungsskalaren

- (a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ_{jk}^i , den Riemannschen Krümmungstensor R_{jkl}^i , den Ricci-Tensor R_{ij} und den Krümmungsskalar R der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $r = \text{const}$ (Benutzen Sie für die Indizes i, j, k, l direkt die Bezeichnungen ϑ und φ) und eines Zylinders mit dem Radius $\rho = \text{const}$ (Benutzen Sie für die Indizes i, j, k, l direkt die Bezeichnungen φ und z). Berechnen Sie die Christoffel-Symbole in beiden Fällen über die Geodätengleichung, wobei Sie als Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \quad (1)$$

benutzen und ds^2 aus der metrischen Fundamentalgleichung entnehmen. Prüfen Sie Ihre so berechneten Christoffel-Symbole anhand der Ergebnisse von Aufgabe 10.

- (b) Erläutern Sie den Unterschied der Krümmungen zwischen der Kugel und dem Zylinder.

19. Parallelverschiebung und Krümmungstensor

Gegeben sind die Standardkoordinaten (ϑ, φ) auf der Kugeloberfläche. Berechnen Sie die Parallelverschiebung eines Tensors 1. Stufe $\underline{v}$ beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch (ϑ_0, φ_0) , $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0)$, $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0 + d\varphi)$ und $(\vartheta_0, \varphi_0 + d\varphi)$. Der Umlaufsinn soll der angegebenen Reihenfolge der Parallelogramm-Eckpunkte entsprechen. Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i = R_{k\vartheta\varphi}^i v^k d\vartheta d\varphi \quad , \quad (2)$$

mit dem Krümmungstensor

$$R_{klm}^i = \Gamma_{kl|m}^i - \Gamma_{km|l}^i + \Gamma_{kl}^n \Gamma_{nm}^i - \Gamma_{km}^n \Gamma_{nl}^i \quad . \quad (3)$$