

Abgabe: Di., 14.12.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

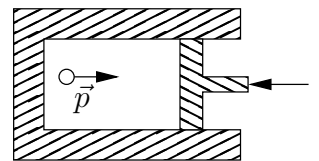
Übungsblätter gibt es unter <https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v>.

26. Adiabatische Invarianz des Phasenraums (7 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem Kasten der Länge l . Das Phasenraumvolumen des Systems ist $\phi(p) = 2lp$, wobei $p = |\vec{p}|$ der Impuls des Teilchens ist. Zur Vereinfachung sei die Bewegung im Kasten eindimensional angenommen. Wir betrachten zwei Fälle:

- Der Stempel werde nun **langsam** (Geschwindigkeit $u = |\vec{u}|$) und **kontinuierlich** hineingeschoben. Es soll eine Reflexion des Teilchens am Stempel möglich sein, so dass das System Gleichgewichtszustände durchläuft.
- Betrachten Sie nun den Fall, dass der Stempel **schnell** zwischen zwei Stößen des Teilchens hineingeschoben wird. D. h. es handelt sich nicht um eine Folge von Gleichgewichtszuständen.

Berechnen Sie für beide Fälle die Änderung des Phasenraumvolumens ϕ . Die Masse des Stempels ist wesentlich größer als die Masse des Teilchens. Erklären Sie anschaulich (ohne Rechnung), wie die jeweiligen Entropieänderungen in den beiden Fällen zustandekommen.



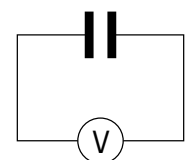
27. Thermische Fluktuationen (12 Punkte)

- Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen in der großkanonischen Gesamtheit gelten:

- $\langle (\Delta N)^2 \rangle = kT \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_T$

- $\langle \Delta E \Delta N \rangle = kT \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_T$

- $\langle (\Delta E)^2 \rangle = kT^2 \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\mu + kT\mu \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_T$



Dabei ist E die mittlere Energie, N die mittlere Teilchenzahl, $kT = 1/\beta$ und μ das chemische Potential.

- Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fluktuationen des Volumens eines Systems bei konstantem Druck. Geben Sie einen Zahlenwert für 1 l Wasser bei $T = 300$ K an. Für Wasser erhält man aus dem Experiment $-\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.
- An einem Kondensator liege eine konstante Spannung an. Berechnen Sie die Ladungsfluktuationen $\langle (\Delta q)^2 \rangle$ am Kondensator. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
 - Bestimmen Sie den statistischen Operator unter den Nebenbedingungen $\text{Sp}(\rho) = 1$ und $\langle q \rangle = Q$, wobei Q die mittlere Ladung der Kondensatorplatten darstellt.
 - Leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem Lagrange-Parameter von q und der anliegenden Spannung U her. Vergleichen Sie hierzu Ihren Ausdruck mit der Formel für die in einem Kondensator gespeicherte Energie.
 - Berechnen Sie mithilfe des statistischen Operators die Ladungsfluktuation. Sie sollten einen analogen Ausdruck wie in Aufgabenteil 27(a)i erhalten.
 - Begründen Sie das Vorzeichen in Ihrem Endresultat. Was muss für das Schwankungsquadrat immer gelten?

Bitte wenden! →

28. Entropie des idealen Gases (6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Entropie S eines idealen Gases von E , V und N aus der thermischen

$$pV = NkT$$

und der kalorischen Zustandsgleichung

$$E = \frac{3}{2}NkT.$$

Verwenden Sie dazu den ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dE = T dS - p dV$$

und beachten Sie dabei, dass S extensiv ist, also

$$S = N s(E/N, V/N).$$

- (b) Bestimmen Sie erneut die Entropie, aber dieses Mal mithilfe der Termzahl $g(E)$ aus Aufgabe 8 (d).

Bestimmen Sie aus der so erhaltenen Entropie die oben genannten Zustandsgleichungen. Überprüfen Sie auch die Extensivität der Entropie, einmal mit und einmal ohne Gibb'schen Korrekturfaktor $N!$.

Hinweis: Nähern Sie für große N : $\ln(N!) \approx N \ln N - N$.

29. Berechnungen mit Markov-Ketten: Schlangen und Leitern (5 Punkte)

Viele in der Thermodynamik auftretenden Systeme können als 'Systeme ohne Erinnerungen' betrachtet werden. Dies bedeutet, dass ihre zeitliche Entwicklung nur vom aktuellen Zustand des Systems und *nicht* vom Weg dorthin abhängt. Solche Systeme lassen durch sogenannte Markov-Ketten beschreiben. Da in kommenden Aufgaben die Analyse thermodynamischer Systeme mit Hilfe der auf Markov-Ketten aufbauenden Monte-Carlo-Methode behandelt werden soll, wird im Folgenden eine elementare Anwendung dieser betrachtet.

In dieser Aufgabe soll das Konzept der Markov-Ketten anhand des Spiels „Schlangen und Leitern“ demonstriert werden. Dabei startet der Spieler auf einem aus N Feldern bestehenden Spielfeld auf Feld 1 und bewegt sich jeden Zug entsprechend einer gewürfelten Augenzahl k Felder weiter. Betritt er ein Feld mit dem unteren Ende einer Leiter, so rückt er auf das Feld mit dem oberen Ende der Leiter vor. Betritt er ein Feld mit dem Kopf einer Schlange, so fällt er auf das Feld am Ende der Schlange zurück. Der Spieler hat gewonnen, wenn er das N -te Feld betritt. Ein beispielhaftes Spielfeld ist rechts dargestellt.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
81	80	83	84	85	86	87	88	89	90
80	79	78	77	75	74	73	72	71	70
61	62	64	63	67	66	65	64	63	62
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Aufgabe: Ermitteln Sie die durchschnittlich zum Sieg benötigte Anzahl von Zügen (auf dem gegebenen Beispielsbrett), indem Sie Markov-Ketten benutzen. Nutzen Sie dazu eine Programmiersprache Ihrer Wahl (geben Sie Ihren Programmcode mit ab) und gehen Sie wie folgt vor:

- Betrachten Sie die Verteilung der Zustände des Spiels (d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Position des Spielers) nach Zug i als Vektor $\vec{z}_i$ in einem N -dimensionalen Vektorraum.
- Stellen Sie eine Matrix auf, die den Übergang von $\vec{z}_i$ zu $\vec{z}_{i+1}$ beschreibt.
Hinweis: Es bietet sich an, die Schritte „Würfel und Ziehen“ sowie „Schlangen und Leitern“ als separate Matrizen aufzustellen und dann zum gesamten Zug zu verknüpfen.
- Stellen Sie die Entwicklung des Spiels durch wiederholte Anwendung der Matrix aus 29b auf einen passenden Startzustand $\vec{z}_0$ dar.
- Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit p_i das Spiel mit dem i -ten Zug zu gewinnen. Berechnen Sie daraus dann die mittlere Anzahl der benötigten Züge bis zum Sieg.