Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE WS 2021/22

6. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

15. Trägheitskräfte

Im Lokalen Inertialsystem IS' ist die Bewegung eines kräftefreien Massenpunkts gegeben durch

$$\frac{d^2x^{i'}}{d\tau^2} = 0 \quad . \tag{1}$$

Es soll überprüft werden, dass die Formulierung der Gleichung in einem beliebigen Nicht-Inertialsystem KS die bekannten Trägheitskräfte enthält. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in KS mit den Koordinaten ξ^i

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{d\xi^j}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau} \tag{2}$$

lautet.

(b) Betrachten Sie als KS ein rotierendes Koordinatensystem mit $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$, $\xi^4 = ct$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t' & \sin\omega t' \\ -\sin\omega t' & \cos\omega t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3}$$

sowie $z' = z$ und $t' = t$. Die gestrichenen Größen bezeichnen die Koordinaten des lokalen Inertialsystems IS'. Lösen Sie nach x' und y' auf und bestimmen Sie die vollständigen Differentiale dx' und dy'.

(c) Berechnen Sie nun das Wegelement ds^2 in KS und lesen Sie den metrischen Tensor g_{ij} ab.

(d) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole über die Geodätengleichung, wobei als Kurvenparameter die Eigenzeit τ zu benutzen ist. Geben Sie nun die resultierenden Trägheitkräfte an.

Bemerkung: Wenn die Christoffel-Symbole aus der Geodätengleichung abgelesen werden sollen, müssen die zweiten Ableitungen entkoppelt sein. Die Entkopplung entspricht dem Schritt von Gleichung (II.173) zu (II.174) innerhalb der Ableitung der allgemeinen Geodätengleichung im Skript (Skript V4).

(e) Zeigen Sie, dass für $v \ll c$ die in (d) bestimmten Trägheitskräfte zu den bekannten Ausdrücken für die Zentrifugal- und Corioliskraft führen.

Bitte wenden ⟶

16. **Mehrfache Lorentz-Transformation**

Es werden zwei spezielle Lorentz-Transformationen ausgeführt. Das System Σ' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_1 gegenüber dem System Σ. Das System Σ'' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_2 gegenüber Σ'. Zeigen Sie, dass die Transformation von Σ zu Σ'' wieder eine Lorentz-Transformation ist, wobei die Relativgeschwindigkeit von Σ und Σ'' der relativistischen Geschwindigkeits-Addition der beiden Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 entspricht.

17. **Allgemeine Lorentz-Transformation**

Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ haben zwei Inertialsysteme Σ und Σ' den gleichen Ursprung und parallele x_3-Achsen. Der Winkel zwischen der x_1- und der x_1'-Achse bei $t = t' = 0$ sei $\alpha > 0$. Geben Sie die Transformationsmatrix zwischen diesen beiden Inertialsystemen an, wobei die Relativgeschwindigkeit des Ursprungs von Σ' aus der Sicht von Σ durch $\underline{v} = v_0\,\underline{e}_1$ gegeben ist.