Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 07.12.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

22. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und antworten Sie in vollständigen Sätzen.

(a) Was sind extensive/intensive Zustandsgrößen?
Geben Sie ein paar Beispiele an.
Begründen Sie, dass die Entropie extensiv ist.

(b) Geben Sie den Mittelwert der Energie und den der Teilchenzahl unter Verwendung der großkanonischen Zustandssumme an.

23. **Maxwell-Verteilung aus der mikrokanonischen Verteilung (6 Punkte)**

Zeigen Sie unter der Annahme der mikrokanonischen Verteilung

$$\rho \propto \delta\left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} - E\right), \tag{1}$$

dass der Impuls eines einzelnen Teilchens im idealen Gas für $N \to \infty$ der Maxwell-Verteilung

$$\rho(\vec{p}) = C\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2mkT}} \tag{2}$$

mit einer passenden Normierungskonstante C (die nicht explizit angegeben werden muss) folgt.

Hinweise:

- Vereinfachen Sie das Phasenraumintegral $\int \rho(\vec{p}, \vec{p_2}, \ldots, \vec{p_N}, \vec{r}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_N})\, \mathrm{d}^{6(N-1)}(p_2 \cdots r_{3N})$ mithilfe der Oberfläche einer $3(N-1)$-dimensionalen Kugel.
- Erinnern Sie sich an den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur im idealen Gas.

24. **Maximierung der Entropie unter Nebenbedingungen (11 Punkte)**

Finden Sie die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho = f(x)$, die die Entropie

$$S = -k\,\langle \ln \rho \rangle = -k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln\left(f(x)\right) \mathrm{d}x$$

maximiert. Beachten Sie dabei die Nebenbedingungen $\langle x \rangle = a$ und $\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = b$ und finden Sie für $f(x)$ eine weitere Nebenbedingung selbst. Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Bitte wenden! →

25. **Entropie in der Informationstheorie (10 Punkte)**

Wir betrachten ein Experiment bei dem die Ereignisse E_n , wobei $n = 1, 2, \ldots, N$, mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n

$$\sum_n p_n = 1 \tag{3}$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Messung eines Ereignisses E_n einen Informationsgehalt $I_n = -\log_2 p_n$ zu.[1] Bei häufiger Wiederholung von solchen Messungen erhält man einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = -\sum_n p_n \log_2 p_n. \tag{4}$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.
2) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man $I = 1\ \mathrm{bit}$.[2]

Aufgaben:

(a) Ein Hund hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt der Feststellung des Aufenthaltsorts?[3]

(b) Ein Fabrikant möchte 3000 Bälle in den Farben rot, grün und blau produzieren. Wieviele Bälle von jeder Farbe muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Farben bei Kindern aber keine Erhebungen angestellt hat? Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

(c) Erinnert die Definition des mittleren Informationsgehalts nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Informationsgehalt zu identifizieren ist.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n, unter denen der mittlere Informationsgehalt aus Glg. (4) maximal wird. Berücksichtigen Sie die Nebenbedingung aus Glg. (3).

[1] $\log_2$ ist der Logarithmus zur Basis 2.

[2] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

[3] Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung des Informationsgehalts (etwa nützlich – unnütz) enthalten ist.