



## 5. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

## 12. Kovariante Ableitung

- (a) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines *kovarianten* Tensors 1. Stufe, d.h.  $V_i$ . Gehen Sie aus von

$$V^i_{||j} = V^i_{|j} + \Gamma^i_{jk} V^k \quad . \quad (1)$$

- (b) Beweisen Sie die Produktregel

$$(v_i w_j)_{||k} = v_{i||k} w_j + v_i w_{j||k} \quad (2)$$

- (c) Schließen Sie nun erneut ausgehend von Gl. (1) auf die kovariante Ableitung eines *kovarianten* Tensors 1. Stufe, indem Sie explizit die Produktregel verwenden.
- (d) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors 2. Stufe  $T_{ij} = v_i w_j$  wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij||k} = T_{ij|k} - T_{lj} \Gamma^l_{ik} - T_{il} \Gamma^l_{jk}. \quad (3)$$

Gehen Sie von den in (a) und (b) bewiesenen Beziehungen aus.

## 13. Fernparallelismus im flachen Raum

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \quad (4)$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der kontravarianten Komponenten des Tensors 1. Stufe  $\underline{v}$  im selben Ereignis  $P$ , d.h. die Komponenten im Nachbarpunkt  $\bar{P}$  werden in der Basis von  $P$  betrachtet. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \quad (5)$$

die Änderung der  $v^i$  bei *Parallelverschiebung* um  $d\xi^k$ . Der Vektor  $\underline{v}$  wird von  $\underline{v}(\bar{P})$  um „ $d\xi$ “ nach  $\underline{v}(P)$  „zurückverschoben“.

Gegeben sind ebene Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi)$  und die Punkte  $P = (\rho_0, 0)$ ,  $Q = (\rho_0, \pi/2)$ ,  $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$ ,  $R_2 = (\epsilon, 0)$ . Der Tensor 1. Stufe  $\underline{v} = \underline{e}_1$  wird als Startvektor einer vorzunehmenden Parallelverschiebung betrachtet.

Bitte wenden  $\longrightarrow$

- (a) Gehen Sie von der wohlbekannten Tatsache aus, dass im flachen Raum Fernparallelismus vorliegt. Überprüfen Sie dies durch Verschiebung von  $\underline{v}$  entlang der geschlossenen Kontur  $PQR_1R_2P$ .
- Skizzieren Sie zunächst die Parallelverschiebung von  $\underline{v}$  entlang der angegebenen Kontur.
  - Berechnen Sie  $v^\rho(\rho, \varphi)$  und  $v^\varphi(\rho, \varphi)$ . Drücken Sie dazu  $\underline{v} = \underline{e}_1$  in der kovarianten Basis der Polarkoordinaten aus.
  - Berechnen Sie damit explizit

$$\int_P^Q dv^\rho, \int_P^Q dv^\varphi,$$

sowie unabhängig davon

$$\int_P^Q \delta v^\rho, \int_P^Q \delta v^\varphi.$$

Die Christoffelsymbole entnehmen Sie einer vorangegangenen Übungsaufgabe.

- iv. Berechnen Sie nun

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

für die geschlossene Kontur  $PQR_1R_2P$ .

- v. Interpretieren Sie das Ergebnis.

- (b) Gehen Sie nun davon aus, dass Sie keine Kenntnis vom Fernparallelismus im flachen Raum haben, sondern diesen erst nachweisen müssen.
- Beschaffen Sie sich ein System von Differentialgleichungen für  $v^\rho(\rho, \varphi)$  und  $v^\varphi(\rho, \varphi)$ . Für den Paralleltransport des konstanten Vektors  $\underline{v}$  gilt auf jedem Wegstück

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad dv^i = \delta v^i, \quad i \in \{\rho, \varphi\}.$$

- ii. Berechnen Sie

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

wobei nun  $v^\rho(\rho, \varphi)$  und  $v^\varphi(\rho, \varphi)$  als angepasste Lösungen des unter (i.) aufgestellten Differentialgleichungssystems erst zu berechnen sind. Als Anfangswert gilt  $\underline{v} = \underline{e}_1$ , d.h.  $v^\rho(\rho_0, 0) = 1$ ,  $v^\varphi(\rho_0, 0) = 0$ .

- iii. Schließen Sie auf den Fernparallelismus.

#### 14. Fernparallelismus im gekrümmten Raum

Gegeben sind die Standardkoordinaten  $(\vartheta, \varphi)$  auf der Kugeloberfläche und die Punkte  $P = (\pi/2, 0)$ ,  $Q = (\pi/2, \pi/2)$ ,  $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$ ,  $R_2 = (\epsilon, 0)$ . Der Tensor 1. Stufe  $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta = -\frac{1}{R_0} \underline{b}_\vartheta$  wird als Startvektor einer vorzunehmenden Parallelverschiebung betrachtet (vgl. A13).  $R_0$  ist der Kugelradius.

- (a) Berechnen Sie entlang des geschlossenen Weges  $PQR_1R_2P$  die Integrale

$$\oint \delta v^\vartheta, \oint \delta v^\varphi$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Als Anfangswert gilt  $v^\vartheta(\pi/2, 0) = -\frac{1}{R_0}$ ,  $v^\varphi(\pi/2, 0) = 0$ . Beschaffen Sie sich dazu ein System von Differentialgleichungen für  $v^\vartheta(\vartheta, \varphi)$  und  $v^\varphi(\vartheta, \varphi)$  aus der Bedingung für den Paralleltransport von  $\underline{v}$ :

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad dv^i = \delta v^i, \quad i \in \{\vartheta, \varphi\}.$$

- (b) Diskutieren Sie den Übergang des Startvektors in den Endvektor und skizzieren Sie den Paralleltransport.