Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 30.11.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

18. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

(a) Geben Sie den statistischen Operator und die Entropie jeweils in der mikrokanonischen, der kanonischen und der großkanonischen Gesamtheit an.

(b) Sie kombinieren zwei unabhängige Systeme mit Entropie S_1 und S_2, die jeweils durch den statistischen Operator ρ_1 bzw. ρ_2 beschrieben werden. Geben Sie den statistischen Operator ρ und die Entropie S des neuen Gesamtsystems an.

19. **Temperatur-Inversion in Spin-Systemen (10 Punkte)**

Gegeben sei ein System aus N wechselwirkungsfreien Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Magnetfeld B. Ein Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ besitzt somit die Energie $E_\uparrow = -\mu B$, während ein Teilchen im Zustand $|\downarrow\rangle$ die Energie $E_\downarrow = +\mu B$ besitzt. Dabei ist $\mu = \text{const.}$ das magnetische Moment eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens.

(a) Geben Sie die Gesamtenergie des Systems in Abhängigkeit der Anzahlen $N_\uparrow$ und $N_\downarrow$ von Teilchen in den Zuständen $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ an.

(b) Geben Sie die Anzahl der möglichen Konfigurationen des Systems an, die zu einer gegebenen Energie E führen.

Betrachten Sie das System nun als mikrokanonische Gesamtheit mit Energie E. Nehmen Sie an, dass die charakteristische Breite des mikrokanonischen Verteilung $\Delta = \mu B$ beträgt.

(c) Zeigen Sie mit geeigneten Entwicklungen und Ihrem Ergebnis aus Aufgabenteil 19b, dass das mikrokanonische **statistische Gewicht** $g(E, \Delta)$ die Form

$$g(E,\Delta) = \left(g_1 \left(\frac{N_\uparrow}{N}, \frac{N_\downarrow}{N} \right) \right)^N \tag{1}$$

mit einer geeigneten Funktion g_1 annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass g_1 die Form

$$g_1 = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{-\left(\frac{1+x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1-x}{2} \right)^{-\left(\frac{1-x}{2}\right)} \tag{2}$$

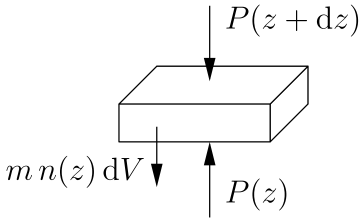
besitzt. Geben Sie $x = x(E, N)$ an. Welche Werte kann x annehmen?

(e) Berechnen Sie β für das vorliegende System. Welche Wertebereich besitzt $\beta(E)$? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Bitte wenden! →

20. **Barometrische Höhenformel (5 Punkte)**

Die barometrische Höhenformel beschreibt die Abnahme des Luftdruckes P bzw. der Teilchendichte n mit der Höhe z. m ist die Masse eines Teilchens.



(a) Leiten Sie die Beziehung zwischen Höhe und Druck bzw. Teilchendichte her.

(b) Korrigieren Sie Ihr Ergebnis aus 20a, indem Sie nun eine lineare Temperaturänderung $T(z) = T(z_0) - \alpha\,(z - z_0)$ mit der Höhe betrachten.

21. **Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung (12 Punkte)**

Aus der Vorlesung ist Ihnen die Maxwell-Verteilung für ideale Gase bekannt:

$$\rho(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit Geschwindigkeitsbetrag v anzutreffen, durch

$$P(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \tag{4}$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_p, d. h. das Maximum der Funktion $P(v)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ihnen aus der Vorlesung bekannten Erwartungswert $\langle v\rangle$.

(c) Wie groß ist die Gesamtentfernung, die alle Teilchen eines idealen Gases innerhalb eines Volumens V pro Sekunde zurücklegen?
Berechnen Sie einen Zahlenwert für Wasserstoff bei $T = 273.15\ \mathrm{K}$ und einem Gasdruck von 1 bar.

(d) Aus einem Ofen entweicht durch eine punktförmige Öffnung ein Gasstrahl ins Vakuum, der durch eine ebenfalls punktförmige Blende horizontal ausgeblendet wird. Der Strahl wird auf einem Schirm im Abstand a aufgefangen.
Man berechne die Intensitätsverteilung $I(z)$ auf dem Schirm unter Berücksichtigung der Schwerkraft. Zwischen Ofen und Blende sei die Schwerkraft zu vernachlässigen.