



4. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

9. Volumenelement

Das Volumenelement $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ im $\mathbb{R}^3$ ist ein Skalar, jedoch i.A. kein Tensor 0. Stufe. Zu einem Tensor wird es durch

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

mit der Determinante des metrischen Tensors $g = \det(g_{ab})$.

Zeigen Sie, dass dV in die bekannten Formeln übergeht für

- (a) Kartesische Koordinaten $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$
- (b) Zylinderkoordinaten $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$
- (c) Kugelkoordinaten $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$
- (d) Beweisen Sie nun, dass ein Tensor 0. Stufe vorliegt, also

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g'} d\xi^{1'} d\xi^{2'} d\xi^{3'} = dV'$$

gilt für beliebige Koordinaten.

Anleitung: Skript Rechenmethoden

10. Christoffel-Symbole und metrischer Tensor

- (a) Zeigen Sie, dass der metrische Tensor g_{ij} die Bedingung $g_{ij|k} = 0$ erfüllt. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij|k} = 0 \quad (1)$$

$$g_{ik|j} = 0 \quad (2)$$

$$g_{jk|i} = 0 \quad (3)$$

mit den Christoffel-Symbolen.

- (b) Kombinieren Sie die Gl. (1)-(3) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{il} (g_{ij|k} + g_{ik|j} - g_{jk|i}) \quad (4)$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Christoffelsymbole für

- (c) Kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$: $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$

Bitte wenden →

- (d) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$
- (e) den 2d Einheitszylinder $\rho = 1$: $\xi^1 = \varphi, \xi^2 = z$
- (f) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$
- (g) die S2-Sphäre (Oberfläche der Einheitskugel $r = 1$): $\xi^1 = \vartheta, \xi^2 = \varphi$

Anleitung: Beschaffen Sie sich die jeweiligen metrischen Tensoren, z.B. aus Aufgabe 2a.

11. Metrischer Tensor der 3d-Hyperkugel

Berechnen Sie das Linienelement ds^2 auf der 3d-Hyperkugel mit Radius $r = R$ im Euklidischen 4d-Raum (definiert als alle Punkte mit Abstand R zum Ursprung) in generalisierten sphärischen Koordinaten:

$$x^1 = r \sin \alpha \sin \vartheta \sin \phi$$

$$x^2 = r \sin \alpha \sin \vartheta \cos \phi$$

$$x^3 = r \sin \alpha \cos \vartheta$$

$$x^4 = r \cos \alpha$$

mit $\alpha, \vartheta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ und bestimmen Sie damit die Elemente g_{ab} des metrischen Tensors.