Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 23.11.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

13. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

(a) Welche Form von Systemen wird durch die mikrokanonische, die kanonische und die großkanonische Gesamtheit beschrieben?
Geben Sie jeweils ein Beispielsystem an.

14. **Erwartungswert und Varianz der mikrokanonischen Verteilungsfunktion (5 Punkte)**

Betrachten Sie ein System mit einer Zustandsdichte $\Omega(\epsilon) \propto \epsilon^{aN}$.
Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E = \langle\epsilon\rangle$ und Varianzen $(\Delta E)^2 = \langle\epsilon^2\rangle - \langle\epsilon\rangle^2$ für große N, unter der Annahme, dass sich das System in der mikrokanonischen Verteilung befindet.

15. **Reinheit von Ensembles (9 Punkte)**

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ein Produkt-Hilbertraum, $n = \dim \mathcal{H}_A$ und $m = \dim \mathcal{H}_B$ mit $n \leq m$.

(a) Sei $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ein beliebiger Zustand. Zeigen Sie, dass sich $|\phi\rangle$ durch die sogenannte **Schmidt-Zerlegung** darstellen lässt:

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \, |\nu_i\rangle \otimes |\mu_i\rangle \ , \tag{1}$$

wobei $\{|\nu_i\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ und $\{|\mu_i\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ paarweise orthonormal und die **Schmidtwerte** a_i eindeutig bestimmt sind.
Hinweis: Nutzen Sie die **Singulärwert-Zerlegung**, welche besagt, dass eine $n \times m$-Matrix M als

$$M = U \, [\Sigma \ \ 0] \, V^T \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist U eine unitäre $n \times n$-Matrix, V eine unitäre $m \times m$-Matrix und Σ eine $n \times n$-Diagonalmatrix.

(b) Die **Reinheit (purity)** eines Ensembles ist definiert als $\mu = \mathrm{Sp}(\rho^2)$. Beschreibt ρ einen reinen Zustand, dann ist offensichtlich $\mu = 1$. Liegt ein Ensemble vor dessen statistischer Operator $\rho = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} |n\rangle\langle n|$ mit einem VONS $\{|n\rangle\}$ ist, dann folgt $\mu = \frac{1}{N}$. Die Reinheit ist also reduziert.
Es liege der reine Zustand $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ als Ensemble in $\mathcal{H}$ vor. Betrachten Sie nun die reduzierten statistischen Operatoren

$$\rho_A = \mathrm{Sp}_B \rho \quad \text{und} \quad \rho_B = \mathrm{Sp}_A \rho \, . \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die Reinheit der reduzierten Ensembles in A und B gleich ist.

(c) Gegeben sei nun ein statistischer Operator ρ' in $\mathcal{H}_A$ mit Eigenwerten ρ_i. Weiter gebe es einen Hilfs-Hilbertraum $\mathcal{H}_C$ mit gleicher Dimension wie $\mathcal{H}_A$ und ein VONS $\{|\varphi_i\rangle\}$ auf $\mathcal{H}_C$.
Geben Sie ein reines Ensemble $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ auf $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C$ so an, dass

$$\hat{\rho}_A \equiv \mathrm{Sp}_C \hat{\rho} = \rho' \tag{4}$$

gilt. Eine solche Erweiterung des statistischen Operators mit Hilfe eines vergrößerten Hilbertraums bezeichnet man als **Purification**.

Bitte wenden! →

16. **Schmidt-Zerlegung praktisch: Bildkompression (8 Punkte)**

Die Studierenden im F-Praktikum, Emmy N. (21) und Albert E. (22) testen die neuartige low-Photon Kamera der Metrolügie-Initiative der TUBS in einem autonomen Flugtaxi über den dunklen Wäldern des südlichen Bayerns. Ziel ist es die exotische Tierwelt dieser Gegend **gut erkennbar zu fotografieren**. Ihr Praktikums-Assi, der gefürchtete Dr. Vlad D. (Alter unbekannt) verlangt jedoch, dass sie dabei **nur so wenig wie nötige Bytes** in das schrottige TUBS Datennetz übertragen.

©BR/Andreas Mack

Als hätte man es erahnt: Mehr als die Intensität, kann die exzellente TUBS Kamera nicht messen. D.h. die Bilder aus dem Cockpit sind schwarz-weiß. Jedes Pixel im Bild entspricht dabei einer Floating-Point Zahl. Um ihre Lösung zu überprüfen erhalten Emmy und Albert ein **Testbild** der ortstypischen Fauna (die Datei finden Sie auf StudIP).
Auch die Betreuung durch Dr. D. ist einfach Spitze: „Sie wissen aus Ihrer vorherigen Aufgabe ja, was eine Schmidt-/Singulärwert-Zerlegung ist. ... Heute, gegen 01:00 Uhr komme ich wieder zu Ihnen.“

(a) Wissensfrage: Wie heißt das Tier aus den Bayerischen Wäldern auf dem Testbild?

(b) Welche und wie viele Schmidtwerte reichen **ungefähr** aus, um das Testbild noch gut zu erkennen?
Schreiben Sie dazu ein ’Prográmmchen’ und beweisen Sie mit entsprechender graphischer Ausgabe Ihre Behauptung.
Selbstverständlich dürfen Sie Bibliotheksfunktionen Ihrer Lieblingssprache nutzen.

(c) Wie groß ist ungefähr der Kompressionsfaktor Ihrer Schmidt-Zerlegung?
Geben Sie dazu das Verhältnis der Anzahl der Floating-Point Zahlen an, welche übertragen werden müssen, relativ zur Anzahl der Floating-Point Zahlen im ursprünglichen Bild.

(d) Emmy und Albert sind erstaunt, dass nur so wenig Information in dem Bild steckt und sind überzeugt, dass das nur an Bayern liegt. Sie beginnen **auf eigene Faust** weitere ’typische’ Schwarz-Weiß-Bilder auszuprobieren.
Als Maßstab stellen Sie sich die Frage: Welchen prozentualen Anteil der Schmidtwerte braucht man für eine ’ausreichende’ Darstellung.
Wie sieht die Verteilung der Schmidtwerte bei ihren ’typischen’ Bildern aus? Was finden sie?

17. **Rechnen mit Faktultäten (5 Punkte)**

Eine hilfreiche Abschätzung in der statistischen Physik ist:

$$\ln(n!) \approx n\,\ln(n) - n; \quad n \in \mathbb{N},\ n \gg 1.$$

(a) Finden Sie für diese Näherung eine einfache Begründung.

(b) Zeigen Sie, dass man mithilfe der **Stirlingformel**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

die gegebene Abschätzung auch erhalten kann.

(c) Ab welchem n ist die relative Abweichung von $\ln(n!)$ kleiner als 1% für:

i. $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

ii. $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

iii. $n! \approx n^n$

Technische Hilfsmittel sind in dieser Teilaufgabe erlaubt, geben Sie Ihren Lösungsweg mit an.
Geben Sie einen eventuellen Programmcode mit ab.