Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 16.11.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

9. **Wissensfragen (2 Punkte)**

   Antworten Sie in ganzen Sätzen und benennen Sie alle verwendeten Größen.

   (a) Was ist ein Dichteoperator?

   (b) Was ist ein mikrokanonisches Ensemble?

10. **Dichteoperatoren von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen (12 Punkte)**

    Für die Komponenten S^α mit $\alpha \in \{x, y, z\}$ des **Spinoperators** $\vec{S}$ eines quantenmechanischen Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens gilt $\left[S^\alpha, S^\beta\right] = i\hbar\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\,S^\gamma$ und $\vec{S}^2 = \sum_\alpha S^\alpha S^\alpha = \frac{3}{4}\hbar^2$.

    (a) Zeigen Sie, dass für die S^α gilt: $\mathrm{Sp}\,S^\alpha = 0$.

    (b) i. Welche Bedingung muss ein **Dichteoperator** für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen erfüllen?

    ii. Beweisen Sie, dass

    $$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u}\,\vec{\sigma})$$

    mit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ einem Vektor mit den drei Paulimatrizen als Komponenten und $\vec{u}$ einem reellen Parametervektor, die von Ihnen aufgestellten Bedingungen erfüllt. Nehmen Sie an, dass $\rho \geq 0$ für geeignete Werte von $\vec{u}$ erfüllt ist.

    (c) Zeigen Sie, dass $\vec{u}$ identisch ist mit dem Mittelwert $\langle \vec{\sigma}\,\rangle = \mathrm{Sp}(\rho\,\vec{\sigma})$.

    (d) Der Dichteoperator habe die Eigenwerte ρ_1 und ρ_2. Drücken Sie $\mathrm{Sp}\,\rho$ und $\mathrm{Sp}\,\rho^2$ durch ρ_1 und ρ_2 aus.

    (e) Begründen Sie, dass $u := |\vec{u}| \leq 1$ sein muss.
    Welche Eigenschaft von $\vec{u}$ charakterisiert einen reinen Zustand?
    Hinweis: Betrachten Sie zunächst $(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})^2$ und vereinfachen Sie damit ρ^2. Nutzen Sie dann Ihre Ergebnisse aus (10d), um die Eigenwerte in Abhängigkeit von u auszudrücken.

    (f) Nun betrachte man N Teilchen in einem Neutronenstrahl. Die Hälfte der Teilchen sei in Richtung der positiven x-Achse, die andere Hälfte in Richtung der negativen y-Achse ausgerichtet.

    i. Geben Sie den Dichteoperator an.

    ii. Wie sieht der Dichteoperator aus, wenn man über die Spins der zweiten Hälfte gar nichts weiß?

Bitte wenden! →

11. **Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) (9 Punkte)**

Ein quantenmechanisches System sei aus 'typischer' kondensierter Materie zusammengesetzt und werde durch einen Hamiltonoperator $H = \sum_\alpha E_\alpha |E_\alpha\rangle \langle E_\alpha|$ mit Eigenzuständen $|E_\alpha\rangle$ zu Eigenenergien E_α beschrieben.

(a) Eine Studierende bringt das System am Anfang ihrer Bachelorarbeit ganz vorsichtig, z.B. in den ersten 5 Tagen (wie auch immer), in einen Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$.
Schätzen Sie grob ab, aus wie vielen Eigenzuständen der Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$ typischerweise superponiert ist.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Unschärferelation.
Nutzen Sie ihre Ergebnisse aus Aufgabe 8, um die Zustandsdichte abzuschätzen.

(b) Über welche Zeitspanne müsste die Studierende den Zustand präparieren, damit es ein einzelner Energieeigenzustand werden kann?

Eine Form der sog. „Eigenstate Thermalization Hypothesis" (ETH) besagt, dass sich der **quantenmechanische Erwartungswert** $\langle \widehat{A}\rangle(t) = \langle \Psi(t)|\widehat{A}|\Psi(t)\rangle$ einer 'typischen' Observablen $\widehat{A}$ in einem 'typischen' Zustand $|\Psi(t=0)\rangle$ mit Energieunschärfe ΔE im Limes langer Zeiten so verhält wie der **thermodynamische statistische Mittelwert** in einem mit demselben Energieintervall ΔE gleichverteilten Ensemble ρ (mikrokanonisches Ensemble) - wenn die Diagonalmatrixelemente $\langle E_\alpha|\widehat{A}|E_\alpha\rangle$ hinreichend schwach variierende Funktionen der Energie E_α sind.

(c) Zeigen Sie nun, dass für ein System, das in einem Zustand Ψ zur Zeit $t = 0$

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |E_\alpha\rangle \tag{1}$$

präpariert wird, der **Langzeitlimes des quantenmechanischen Erwartungswerts** $\overline{A}$ einer Observablen $\widehat{A}$, definiert als

$$\overline{A} \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\langle \Psi(t) \middle| \widehat{A} \middle| \Psi(t) \right\rangle dt\,, \tag{2}$$

durch

$$\overline{A} = \sum_\alpha |c_\alpha|^2 A_{\alpha\alpha} \tag{3}$$

gegeben ist. Dabei sind die $A_{\alpha\alpha} = \langle E_\alpha|\widehat{A}|E_\alpha\rangle$, die Zustände $|E_\alpha\rangle$ Eigenzustände des Hamilton-Operators zur Energie E_α und $c_\alpha \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie $|\Psi(t)\rangle$ mit $|\Psi(t=0)\rangle$ zusammenhängt.

(d) Der **Mittelwert im mikrokanonischen Ensemble** der Observablen $\widehat{A}$ ist gegeben durch

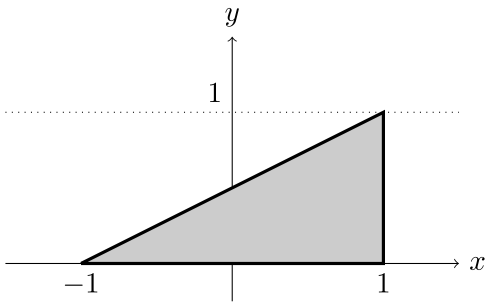
$$\langle A\rangle_{\text{mikro}} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\alpha'=1}^{\mathcal{N}} A_{\alpha'\alpha'}\,, \tag{4}$$

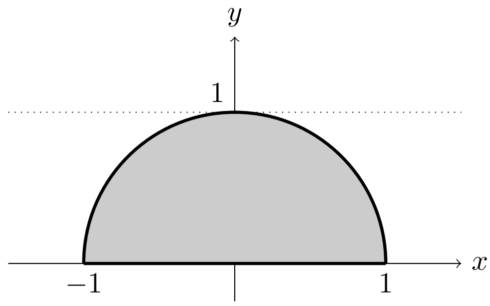
wobei die Summe über alle Zustände $|E_{\alpha'}\rangle$ in einem kleinen Energieintervall ΔE um E mit insgesamt $\mathcal{N}$ Zuständen läuft.
Zeigen Sie, dass unter den Annahmen der ETH gilt:

$$\overline{A} \approx \langle A\rangle_{\text{mikro}} \tag{5}$$

Bitte wenden! →

12. **Korrelationen (7 Punkte)**





Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck und einen Halbkreis jeweils wie oben dargestellt.
Sei $\tilde{X}$ eine gleichverteilte Zufallsvariable, die jeweils einen Punkt aus der Figur auswählt.
Dann ist $X = \tilde{X}_1$, die x-Komponente von $\tilde{X}$, ebenfalls eine Zufallsvariable.

(a) Geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x) \equiv p(X = x) \equiv p(\tilde{X}_1 = x)$ von X an.

(b) Bezeichne $h(x)$ die Höhe der Figur an der Stelle x. Berechnen Sie für beide Figuren:

$$C = \frac{\langle X h(X) \rangle - \langle X \rangle \langle h(X) \rangle}{\sqrt{\langle X^2 \rangle \cdot \langle h(X)^2 \rangle}} \tag{6}$$

Dabei gilt für eine kontinuierliche Zufallsvariable A mit Wahrscheinlichkeitsverteilung p_A

$$\langle f(A) \rangle = \int \mathrm{d}x\, f(x) p_A(x). \tag{7}$$

(c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus 12b.