Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Di., 09.11.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v`.

4. **Wissensfragen (3 Punkte)**

   Antworten Sie in ganzen Sätzen und benennen Sie alle verwendeten Größen.

   (a) Was legt den Mikrozustand und was den Makrozustand fest?
   (b) Was ist ein Ensemble?
   (c) Warum ist das Zeitmittel nicht bedingungslos gleichzusetzen mit dem Scharmittel?

5. **Fehlerrechnung (2 Punkte)**

   Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\langle x \rangle$ und Varianz $(\Delta x)^2$, sowie eine differenzierbare Funktion $y(x)$. Zeigen Sie, dass in erster Ordnung in Δx gilt:

   $$\langle y(x) \rangle = y(\langle x \rangle) \quad \text{und} \quad \Delta y = \left| y'(\langle x \rangle) \right| \Delta x.$$

6. **Eigenschaften der Spur (3 Punkte)**

   (a) Zeigen Sie, dass für die Spur von zwei Matrizen A, B gilt:

   $$\mathrm{Sp}(A\,B) = \mathrm{Sp}(B\,A)$$

   (b) Zeigen Sie nun, dass für die Spur von drei Matrizen A, B, C gilt:

   $$\mathrm{Sp}(A\,B\,C) = \mathrm{Sp}(C\,A\,B) = \mathrm{Sp}(B\,C\,A)$$

   d. h. die Spur ist invariant unter zyklischer Vertauschung.

   (c) Zeigen Sie, dass die Spur basisunabhängig ist.

7. **Das Gesetz der großen Zahlen - empirisch (4 Punkte)**

   Das Gesetz der großen Zahlen soll empirisch nachgewiesen werden. Betrachten Sie dazu zunächst eine Messung (Zufallsvariable) X, die kontinuierliche Messergebnisse im Interval $[0, 1]$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit liefert.

   (a) Bestimmen Sie empirisch die statistischen Eigenschaften von X, indem Sie mit Hilfe einer beliebigen Programmiersprache 500 (zufällige) Ergebnisse für X erzeugen und daraus Erwartungswert und Varianz berechnen.
   (b) Wiederholen Sie Aufgabenteil 7a mit Messreihen der Größe 5000 und 50000.

   Um den Erwartungswert von X genauer (sprich: mit kleinerer Varianz) vorherzusagen, können N Messergebnisse gemittelt werden. Formal ergibt dies eine Zufallsvariable $Y = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)$, wobei die X_i jeweils eine Messung von X bezeichnen.

   (c) Bestimmen Sie nun empirisch die statistischen Eigenschaften von Y für $N = 5, 50, 500$, indem Sie jeweils 100 (zufällige) Ergebnisse für Y erzeugen (d.h. erzeugen Sie N Ergebnisse von X und mitteln Sie diese) und daraus Erwartungswert und Varianz berechnen.
   (d) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgabenteile 7a und 7b mit denen aus Aufgabenteil 7c und bewerten Sie den Einfluss der Mittelung von Messergebnissen.

   Hinweis: Bitte geben Sie Ihren verwendeten Programmcode mit ab. Die erzeugten Zufallszahlen müssen **nicht** mit abgegeben werden.

Bitte wenden! →

8. **Zustandssumme und Zustandsdichte des idealen Gases (18 Punkte)**

Wir betrachten die thermodynamischen Eigenschaften des idealen Gases. Dazu werden N wechselwirkungsfreie, ununterscheidbare Teilchen in einen Würfel der Kantenlänge L gesperrt. Zur Beschreibung des Würfels kann man sich ein Potential vorstellen, welches innerhalb des Würfels 0 und ausserhalb unendlich ist. Berechnen Sie die **Zustandssumme** Z, **Zustandsdichte** $\Omega(E)$ und die **Zahl der Zustände** $g(E)$ bis zur Energie E.
Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Die N Teilchen und die dazugehörigen Phasenraumkoordinaten sind voneinander unabhängig (vgl. Annahmen) – es kann deshalb zunächst der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einer Dimension betrachtet werden. Geben Sie die Lösung der Wellenfunktion und der Energie an.

(b) Berechnen Sie nun die Zustandssumme für N Teilchen in drei Dimensionen.
Hinweis: Es treten in der Aufgabe Gauß-Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ auf.

(c) Um die Anzahl der Zustände bis zur Energie E zu bestimmen, braucht man das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel:

i. Schreiben Sie ein Volumenintegral in kartesischen Koordinaten über den Integranden 1 für eine Kugel mit Radius R in N Dimensionen auf.
Dies ist das Volumen V_N einer N-dimensionalen Kugel.

ii. Versuchen Sie mithilfe einer Substitution das Volumenintegral aus (8(c)i) in die Form $V_N = R^N \cdot f(N)$ zu bringen.

iii. Berechnen Sie anschließend folgenden Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_N \, e^{-(x_1^2+x_2^2+...+x_N^2)}$$

Wovon hängt der Integrand ab? Sie können demnach die Integration über Kugelschalen ausführen, d.h.:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_N \to \mathrm{d}(\text{Kugelschale}) \, \mathrm{d}R$$

Überlegen Sie sich dazu, wie sich das Integral über die Kugelschale aus ihrem Ergebnis aus (8(c)ii) ableiten lässt.
Sie können die Überlegung mit dem Ihnen bekannten Fall aus dem $\mathbb{R}^3$ überprüfen.

iv. Eine Vereinfachung der auftretenden Integrale kann mit Hilfe der Γ-Funktion erreicht werden:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}$$

Nutzen Sie dies, um einen Ausdruck für $f(N)$ aus (8(c)ii) zu erhalten.

v. Überprüfen Sie das Ergebnis für das Volumen V_3 einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ mithilfe der Rekursionsformel für $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n); \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

(d) Mithilfe des in Aufgabenteil (8c) bestimmten Volumens einer N-dimensionalen Kugel können Sie das Phasenraumvolumen von $3N$ Variablen zu einer Energie E bestimmen. Es fehlt nur noch die obere Integrationsgrenze, also der Radius der $3N$-dimensionalen Kugel dem die Energie E entsprechen muss.

(e) Um die Zustandsdichte $\Omega(E)$ zu bestimmen, überlegen Sie sich, was die Zustandsdichte ist und wie sie mit $g(E)$ in Beziehung steht.