



Abgabe: Di., 02.11.2021 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter <https://lnk.tu-bs.de/HVwt0v>.

1. Wissensfragen (5 Punkte)

Antworten Sie in ganzen Sätzen und benennen Sie alle verwendeten Größen.

- (a) Geben Sie die Definition des Binomialkoeffizienten an.
- (b) Geben Sie den binomischen Lehrsatz an.
- (c) Was ist eine Zufallsvariable? Geben Sie mindestens ein Beispiel an.
- (d) Wie lautet das Gesetz der großen Zahlen?

2. Motivation zur statistischen Betrachtung: Flugbahn (5 Punkte)

Betrachtet wird die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem verdünnten Gas. Die Bahn möge als Gerade zwischen zwei Stößen idealisiert werden, so dass man nur die Orte und Zeiten der Stöße speichern muss. Zur Bestimmung der mittleren Stoßzeit benutze man die Zahlenwerte: Dichte $n = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, Wirkungsquerschnitt $\sigma = 10^{-16} \text{ cm}^2$ und mittlere Geschwindigkeit $v = 10^5 \text{ cm/s}$. Zur Speicherung einer reellen Zahl als *double* benötigt man auf einem Computer 8 Byte.

- (a) Über welche Zeitspanne kann die Bahn auf einer 100 GB großen Festplatte dokumentiert werden?
- (b) Wenn man sich auf vierstellige Zahlenangaben beschränkt und eine Sekunde der Bahn des Teilchens auf Papier mitprotokollieren möchte (mit etwa 5000 Zeichen pro Seite): Wieviel Blatt Papier sind dazu nötig? Wie lange dauert der Vorgang wenn ein Drucker die Seiten mit etwa 10 Seiten/Minute auswirft? Berechnen Sie das Gesamtgewicht des dazu benötigten Papiers (6 g/Blatt).
- (c) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (2a) und (2b) für alle Teilchen in einem 0.3 l -Glas. Zum Vergleich: Das Gewicht der Erde ist $5.9 \times 10^{24} \text{ kg}$.

3. Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (20 Punkte)

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu allen Ereignissen einer **Zufallsvariablen** X .

Eine bekannte diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Binomial-Verteilung**

$$B(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \quad (1)$$

Dabei gilt für die Parameter: $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ und $x \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel $\langle X \rangle$ aller möglichen Werte einer Zufallsvariablen wird als ihr **Mittelwert** bezeichnet. Im Fall der diskreten Binomial-Verteilung gilt also:

$$\langle X \rangle := \sum_{x=0}^n x B(X=x, n, p). \quad (2)$$

- (a) Berechnen Sie den Mittelwert der Binomial-Verteilung durch Gleichung (2) unter Ausnutzung des binomischen Lehrsatzes.

- (b) Die **Varianz**

$$\text{Var} X = (\Delta X)^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (3)$$

ist (wie die **Standardabweichung** ΔX) ein Maß für die Abweichung einer Observablen von ihrem Mittelwert.

Berechnen Sie die Varianz der Binomial-Verteilung.

Folgern Sie das **Gesetz der großen Zahlen** aus den relativen Schwankungen $\frac{\Delta X}{\langle X \rangle}$.

- (c) Vertrauen Sie einem Würfel, der von 100 Würfeln 20mal eine Sechs zeigt?

Wie ist es bei einem Würfel, der von 1000 Würfeln 200 Sechser erzielt?

Begründen Sie Ihre Antwort!

- (d) Eine weitere Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die **Poisson-Verteilung**

$$P(\lambda, x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}. \quad (4)$$

mit $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass für $n \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ mit $\lambda = np = \text{const.}$ die Binomial-Verteilung $B(x, n, p)$ in die Poisson-Verteilung $P(\lambda, x)$ übergeht.

- (e) Nach dem **Grenzwertsatz** konvergieren alle diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $n \rightarrow \infty$ gegen eine **Normal-Verteilung**

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (5)$$

mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

Zeigen Sie dies für die Binomial-Verteilung indem Sie zuerst die näherungsweise Identität

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi x(n-x)}} \exp\left(-n h\left(\frac{x}{n}\right)\right) \quad (6)$$

mit $h(t) := t \ln\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t) \ln\left(\frac{1-t}{q}\right)$ und $q = 1-p$

durch Ausnutzung der **Stirlingschen Formel** $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \dots)$ herleiten und dann die Funktion $h(t)$ bis zur zweiten Ordnung um p herum entwickeln.

Für welche Werte von x ist diese Näherung gut?