INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

Elektrodynamik SS 2021

Klausurvorbereitungsblatt Bearbeitungszeit: 180 Minuten

---

1. **Wissensfragen**

   Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

   (a) Geben Sie die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form an. Benennen Sie die Gleichungen. Leiten Sie daraus das Poynting-Theorem her.
   (b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Laplace Gleichung für ein zylindersymmetrisches Problem an.
   (c) Wie muss man die elektromagnetischen Potentiale $\underline{A}$ und Φ einführen, damit die beiden homogenen Maxwellschen Gleichungen identisch erfüllt werden?
   (d) Geben Sie die Definitionen von elektrischem Monopol-, Dipolmoment und Quadrupoltensor an. Wie lauten die Beiträge der einzelnen Momente und des Quadrupoltensors zum Potential $\Phi(\underline{r})$?
   (e) Was sind die Lienert-Wiechert-Potentiale?
   (f) Was besagt das Larmorsche Theorem?
   (g) Was geben die Fresnelschen Formeln an?
   (h) Wie transformieren sich die kovarianten Komponenten eines Lorentz-Tensors zweiter Stufe unter der Lorentz-Transformation?
   (i) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen in invarianter Tensorform an.
   (j) Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols mit Dipolmoment $\underline{m}$.

2. **Punktladung vor einer dielektrischen Kugel**

   Eine homogene dielektrische Kugel mit Radius R hat ihren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Die Permittivität des Materials der Kugel ist ϵ. Im Außenraum liegt Vakuum vor und bei $\underline{x}_e = a\,\underline{e}_3$ befindet sich eine Punktladung e mit $e > 0$.

   (a) Beschreiben Sie die Wirkung der Punktladung auf das Dielektrikum der Kugel.

   (b) Geben Sie die Rand- und Grenzbedingungen für das skalare Potential Φ an.

Bitte wenden⟶

(c) Geben Sie die Differentialgleichung für Φ innerhalb und außerhalb der Kugel an und schreiben Sie den jeweiligen Lösungsansatz auf.

(d) Bestimmen Sie die freien Parameter des Lösungsansatzes und geben Sie die Lösungen für Φ im Innen- und Außenraum der Kugel an.

3. **Zylinderkondensator**

Zwei metallische Zylindermäntel der Länge L mit den Radien R_1 und R_2 sind so ineinander geschoben, dass die Querschnitte senkrecht zur Zylinderachse konzentrische Kreise sind. Der innere Mantel trage die konstante Flächenladungsdichte σ_1; der äußere Mantel sei mit σ_2 aufgeladen. Vernachlässigen Sie Randeffekte, d.h. benutzen Sie $R_1, R_2 \ll L$.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ in den Raumbereichen I ($\rho < R_1$, ρ in Zylinderkoordinaten), II ($R_1 < \rho < R_2$) und III ($R_2 < \rho$). Ist $\underline{E}$ stetig bei $\rho = R_1$ bzw. $\rho = R_2$? Begründen Sie Ihre Beobachtung!

(b) Geben Sie das Potential Φ in den Bereichen I, II und III an.
Ist Φ stetig?

(c) Wie müssen σ_1 und σ_2 gewählt werden, damit das elektrische Feld im Außenraum III verschwindet? Geben Sie für diesen Fall die Kapazität $C = Q/\delta\Phi$ an. Mit $\delta\Phi$ wird die Potentialdifferenz zwischen den Zylindern bezeichnet. Q ist die Gesamtladung eines Zylindermantels.

4. **Methode der Spiegelladungen**

Eine Punktladung q befinde sich in einem Volumen V, das durch zwei geerdete leitende Ebenen begrenzt wird, die sich unter dem Winkel α schneiden.

(a) Betrachten Sie $\alpha = 90°$, d.h. das Volumen $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1, x_2 > 0\}$. Die Punktladung q befinde sich am Ort $\underline{x} = (a\cos(\alpha/2), a\sin(\alpha/2), 0)$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie das Potential Φ mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen. Zeigen Sie explizit, dass Ihre Wahl der Spiegelladungen die Randbedingung $\Phi(\underline{x})|_{\underline{r}\in\partial V} = 0$ erfüllt.

(b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, dass die Platten den Winkel $\alpha = 180°/n$ einschließen, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Skizzieren Sie Position und Vorzeichen der Spiegelladungen für $\alpha = 60°$ und $\alpha = 45°$. Wie viele Spiegelladungen werden allgemein in Abhängigkeit von n benötigt?

Bitte wenden⟶

5. **Relativitätstheorie**

Die Teilaufgaben (a) und (b) können *voneinander unabhängig* bearbeitet werden.

(a) *Transformation von Beschleunigungen*
Aus der Sicht eines Inertialsystems Σ bewege sich ein Teilchen mit der konstanten Beschleunigung $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1$. Welche Beschleunigung a'_1 parallel zur x'_1-Achse misst ein Beobachter aus einem Inertialsystem Σ', das sich relativ zu Σ mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v} = v\,\underline{e}_1$ bewegt?
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\mathrm{d}x'_1, \mathrm{d}t'$ und ermitteln Sie dann $u'_1 = \mathrm{d}x'_1/\mathrm{d}t'$ und $a'_1 = \mathrm{d}u'_1/\mathrm{d}t'$. Verwenden Sie die spezielle Lorentz-Transformation.

(b) *Zentraler Stoß: Relativistische Betrachtung*
Bei einem zentralen, eindimensionalen Stoß zweier Elektronen (Index '1' bzw. '2') mit Ruhemasse m_e werden in einem Experiment vor und nach dem Stoß die folgenden relativistischen Energien E (Ruhe + kinetisch) beobachtet:

$$E_{1,\text{vor}} = m_e c^2 \qquad E_{1,\text{nach}} = 2m_e c^2$$
$$E_{2,\text{vor}} = 4m_e c^2 \qquad E_{2,\text{nach}} = 3m_e c^2$$

Mit m_e wird die Ruhemasse eines Elektrons bezeichnet. Die Angaben beziehen sich auf das Inertialsystem, in dem das Elektron 1 vor dem Stoß ruht.
Untersuchen Sie, ob ein Stoßereignis mit den angegebenen Energien überhaupt möglich ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden⟶

6. **Magnetfeld einer quadratischen Leiterschleife**

Die Teilaufgaben (a),(b) und (c) können *voneinander unabhängig* bearbeitet werden.

Wir betrachten eine quadratische Leiterschleife der Kantenlänge a, die so in der (x, y)-Ebene liegt, dass sich der Mittelpunkt im Ursprung befindet. Die Leiterschleife wird von einem konstanten Strom I im Uhrzeigersinn durchflossen. Der Durchmesser des Drahtes darf vernachlässigt werden.

(a) Skizzieren Sie die Anordnung.

(b) *Oersted Gesetz*

i. Bestimmen Sie zunächst unter Benutzung des Gesetzes von Oersted die magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{x})$ außerhalb eines unendlich langen **geraden** Drahtes. Machen Sie dabei für $\underline{B}(\underline{x})$ einen Ansatz, der die Symmetrie des Problems berücksichtigt.

ii. Nehmen Sie an, dass a hinreichend groß ist um Randeffekte zu vernachlässigen. Bestimmen Sie die magnetische Induktion im Mittelpunkt der Leiterschleife durch Superposition.

(c) *Biot-Savart-Gesetz*

Verwenden Sie nun das Biot-Savart-Gesetz um wiederum das Magnetfeld im Mittelpunkt zu bestimmen. Beachten Sie die Geometrie der Leiterschleife bei der Wahl des Koordinatensystems.

Hinweis:

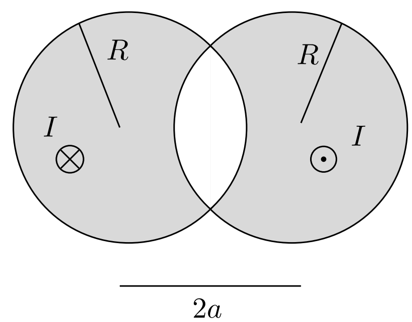
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(A^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{2}{A^2} \quad .$$

Die Integration von $-\infty$ bis ∞ entspricht hierbei einem Vernachlässigen der Randeffekte.

Bitte wenden⟶

7. **Magnetfeld paralleler Drähte**

Der Querschnitt eines Systems aus zwei geraden, unendlich langen Leitern in x_3-Richtung mit $\mu = 1$ sei gegeben durch das Überlappen zweier Kreise mit Radius R, deren Mittelpunkte sich im Abstand $2a$ voneinander befinden. Hierbei sei $0 < a < R$ (siehe Skizze). Im linsenförmigen Überlappungsbereich sei Vakuum, während die anderen beiden Bereiche von einer konstanten Stromdichte $j_0 = \frac{I}{\pi R^2}$ in jeweils entgegengesetzte Richtungen durchflossen werden. j_0 ist positiv im rechten Draht und zeigt in Richtung der x_3-Achse.



In kartesischen Koordinaten ist die magnetische Induktion im Inneren *eines* unendlich langen Leiters, dessen Mittelpunkt des Kreisquerschnittes im Ursprung ($x_1 = 0, x_2 = 0$) liegt und dessen Stromrichtung in positive x_3-Richtung zeigt, gegeben durch

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie die magnetische Induktion im jeweiligen Innenraum des linken und des rechten Leiters getrennt voneinander, wobei der linke Leiter um a nach links verschoben ist und den Mittelpunkt des Kreisquerschnittes bei $x_1 = -a$ hat und der rechte Leiter entsprechend nach rechts verschoben ist mit dem Mittelpunkt bei $x_1 = +a$. Die jeweiligen Ströme sind der Skizze zu entnehmen.

(b) Skizzieren Sie die $\underline{B}$-Feldlinien in der (x_1, x_2)-Ebene innerhalb der linsenförmigen Vakuumregion. Begründen Sie Ihre Skizze qualitativ.

(c) Verifizieren Sie ihre qualitative Skizze mithilfe einer Rechnung.