INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

ELEKTRODYNAMIK SS 2021

12. Übungsblatt Abgabe: 13. Juli 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

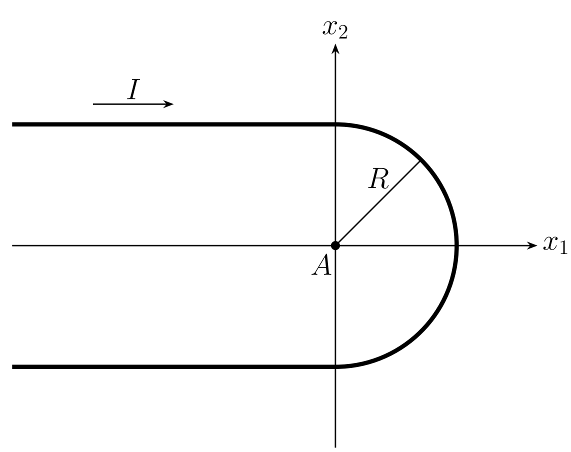
Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

30. Stromdurchflossener Draht (4 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich langer, gerader zylindrischer Draht mit dem Radius R, der von einem konstanten Strom I durchflossen wird. Der Strom sei gleichmäßig über den Querschnitt des Drahtes verteilt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Oersted das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Drahtes und skizzieren Sie $|\underline{B}|$ als Funktion des Abstandes von der Achse des Drahtes. Die Permeabilitäten innerhalb und außerhalb des Drahtes sind $\mu = 1$.

31. Biot-Savart-Gesetz I (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes das Magnetfeld im Punkt A für den in der Skizze dargestellten, stromdurchflossenen dünnen Draht. A sei der Mittelpunkt des Halbkreises mit Radius R. Der Draht sei entlang der negativen x_1-Achse unendlich lang.
Hinweis: Zerlegen Sie die Integration geeignet und überlegen Sie sich Parametrisierungen für die Teilstücke.



Bitte wenden ⟶

32. Mie-Darstellung quellfreier Vektorfelder **(10 Punkte)**

Die Mie-Darstellung ermöglicht die Zerlegung eines divergenzfreien Vektorfeldes in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil. Nach dem Gesetz von Oersted stellt die Stromdichte $\underline{j}$ im stationären Fall ein divergenzfreies Vektorfeld dar ($\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{j} = 0$) und lässt sich in der Form

$$\underline{j} = \underline{j}_P + \underline{j}_T$$

mit

$$\mu_0 \underline{j}_P = \partial_{\underline{x}} \times \left[\partial_{\underline{x}} \times (\Gamma_P \underline{r})\right] \tag{1}$$

und

$$\mu_0 \underline{j}_T = \partial_{\underline{x}} \times (\Gamma_T \underline{r}) \tag{2}$$

zerlegen. Dabei ist $\underline{r} = r\,\underline{e}_r$ der Ortsvektor in Kugelkoordinaten und $\Gamma_P(\underline{r})$ und $\Gamma_T(\underline{r})$ sind skalare Funktionen. $\underline{j}_P$ wird als poloidaler Anteil und $\underline{j}_T$ wird als toroidaler Anteil der Stromdichte bezeichnet. Neben der Stromdichte ist auch das Magnetfeld $\underline{B}$ divergenzfrei und lässt sich ebenfalls in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil zerlegen, sodass

$$\underline{B} = \underline{B}_P + \underline{B}_T.$$

Das poloidale Magnetfeld wird dabei von toroidalen Strömen getrieben, wohingegen das toroidale Magnetfeld aus poloidalen Strömen resultiert. Nach dem Biot-Savart-Gesetz sind die Anteile des Magnetfeldes über

$$\underline{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{j}_T(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|^3}\, \mathrm{d}^3 r' \tag{3}$$

$$\underline{B}_T = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{j}_P(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{\left|\underline{r} - \underline{r}'\right|^3}\, \mathrm{d}^3 r' \tag{4}$$

mit der Stromdichte verknüpft.

(a) Zeigen Sie durch explizites Einsetzen von Gleichung (2) in Gleichung (3), dass das poloidale Feld durch

$$\underline{B}_P = \partial_{\underline{x}} \times \left[\partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r})\right],$$

mit $\Gamma_T = -\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P$ gegeben ist.

Hinweise:

- Die Beziehung $\Gamma_T = -\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P$ darf ohne Beweis vorausgesetzt werden.
- Für eine hinreichend glatte Funktion f gilt: $\partial_{\underline{x}} \times \left(\underline{r}\, \partial_{\underline{x}}^2 f\right) = \partial_{\underline{x}}^2 \left[\partial_{\underline{x}} \times (f \underline{r})\right]$
- Nutzen Sie die Identität $\underline{A}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial_{\underline{x}'}^2 \underline{A}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r'$
- Für beide Teilaufgaben ist die Anwendung geeigneter mehrdimensionaler Produktregeln (Blatt 1, A2) hilfreich.

(b) Zeigen Sie durch explizites Einsetzen von Gleichung (1) in Gleichung (4), dass das toroidale Feld durch

$$\underline{B}_T = \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}),$$

mit $\Psi_T = \Gamma_P$ gegeben ist.

Hinweis: Zeigen Sie in Analogie zur Eichfreiheit des Vektorpotentials, dass es eine Eichfunktion Φ gibt, sodass ohne Einschränkung $\partial_{\underline{x}} \cdot (\Gamma_P\, \underline{r}) = 0$ angenommen werden kann und leiten Sie die Bestimmungsgleichung für Φ her.