Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

10. Übungsblatt — Abgabe: 29. Juni 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

24. Punktladung im konstanten elektrischen Feld (7 Punkte)

Die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und der Ladung q, das sich in einem konstanten elektrischen Feld $\underline{E} = E_0 \underline{e}_1$ in der (x_1, x_2)-Ebene bewegt, sind:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = qE_0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{m_0 \dot{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad \text{mit} \quad \beta^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{c^2} \quad .$$

Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen und geben Sie $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ sowie $(x_1(t), x_2(t))$ an. Vergleichen Sie mit dem nicht-relativistischen Fall. Die Anfangsbedingungen seien

$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \quad ; \quad x_1(0) = 0 \quad ; \quad x_2(0) = 0 \quad .$$

Hinweise:

(1) Die erste Integration der beiden Gleichungen lässt sich leicht ausführen. Dividieren Sie die so erhaltenen Gleichungen durcheinander. So erhalten Sie einen linearen Zusammenhang zwischen $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$. Eliminieren Sie danach $\dot{x}_1$ aus der Gleichung für $\dot{x}_2$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \text{const.}$

25. Plattenkondensator (8 Punkte)

Wir betrachten einen Plattenkondensator, dessen dünne Platten in der x_1-x_2-Ebene bei $x_3 = -a$ und $x_3 = a$ liegen. Im Inneren des Kondensators sei ein Dielektrikum mit der Permittivität ϵ. Die Platten tragen die Flächenladungsdichten ρ_s bei $x_3 = -a$ und $-\rho_s$ bei $x_3 = +a$. Die Ausdehnung der Platten sei groß im Vergleich zu ihrem Abstand, so dass alle Differentiationen in x_1 -und x_2-Richtung vernachlässigt werden können (Vernachlässigung von Randeffekten).

(a) Skizzieren Sie die Anordnung. Markieren Sie die drei auftretenden Gebiete: Index I für das Vakuum bei $x_3 < -a$. Index II für das Dielektrikum bei $-a < x_3 < +a$. Index III für das Vakuum bei $x_3 > a$. Zeichnen Sie die Normalenvektoren $\underline{n}$ der Grenzflächen ein. Geben Sie die Grenzbedingungen an den Platten für das Potential Φ und die dielektrische Verschiebung $\underline{D}$ an. Der Außenraum des Kondensators sei feldfrei.

(b) Lösen Sie die Potentialgleichung in den Gebieten I, II und III. Überlegen sie vorab, ob Sie die Poisson-Gleichung oder die Laplace-Gleichung benutzen müssen. Passen Sie die drei Lösungen mittels der Grenzbedingungen aneinander an. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials und den Betrag des elektrischen Feldes entlang der x_3-Achse.

Bitte wenden ⟶

(c) Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als

$$C = \frac{Q}{\delta\phi} \quad . \tag{1}$$

Q ist die Gesamtladung einer Platte. Die Plattengröße sei S. $\delta\phi$ ist die Potentialdifferenz zwischen den Platten.

Geben sie die Kapazität des Plattenkondensators in Abhängigkeit von den geometrischen Größen an.

(d) Bestimmen Sie die Energiedichte u im Inneren des Kondensators in Abhängigkeit von den geometrischen Größen. Zeigen Sie, dass im Kondensator insgesamt die Energie

$$U = \frac{1}{2}C\left(\delta\phi\right)^2 \tag{2}$$

gespeichert ist.

26. Homogen geladene Kugel mit Vakuole **(5 Punkte)**

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ_0 aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2, sein Mittelpunkt $\mathcal{O}_2$ befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt $\mathcal{O}_1$ der großen Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel? Im Unendlichen soll das Potential verschwinden.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie das Problem durch Superposition zweier bereits bekannter einfacher Probleme lösen können. Zudem greift ein eleganter Lösungsweg zur Bearbeitung der Teilaufgaben auf die integrale Form des Gauß'schen Gesetzes zurück und nutzt geeignete Symmetrieeigenschaften für das elektrische Feld $\underline{E}$ aus.