



21. Lorentz-Tensoren

(13 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder unter der speziellen Lorentz-Transformation diskutiert werden.

- (a) Zeigen Sie, dass die Größe $\underline{E}^2 - c^2 \underline{B}^2$ ein Tensor 0. Stufe (Lorentz-Skalar) ist. Führen Sie den Nachweis auf zwei verschiedenen Wegen:
- durch direkte Verwendung der in der Vorlesung angegebenen Transformationsgleichungen für die Felder,
 - durch Verwendung des Tensorkalküls. Betrachten Sie dazu die Größe $\mathcal{B}_{ij} \mathcal{B}^{ij}$, wobei $\mathcal{B}_{ij}$ den Feldstärketensor bezeichnet.

Bemerkung: Die Größe $\frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}^2 - c^2 \underline{B}^2)$ wird als *Lagrange-Dichte* des freien elektromagnetischen Feldes bezeichnet.

- (b) Ist es möglich, eine Lorentz-Transformation anzugeben, die ein reines elektrisches Feld ($\underline{B} = 0$) auf ein reines magnetisches Feld ($\underline{E}' = 0$) transformiert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von (a).
- (c) Zeigen Sie analog zu Teilaufgabe (a) auf zwei Wegen, dass $\underline{E} \cdot \underline{B}$ ein Tensor 0. Stufe ist.
Hinweis: Für die Rechnung im Tensorkalkül ist es hilfreich, zunächst die Determinante des Feldstärketensors zu bestimmen.
- (d) Untersuchen Sie durch Verwendung der Transformationsgleichungen für die Felder, wie sich die Größen

$$\underline{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \underline{E} \times \underline{B} \quad (\text{Poynting-Vektor im Vakuum}) \quad (1)$$

und

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2 \right) \quad (\text{Energiedichte im Vakuum}) \quad (2)$$

unter der speziellen Lorentz-Transformation auf das gestrichene System transformieren.

22. Transformation von Feldern

(3 Punkte)

Der Sonnenwind ist eine von der Sonne ausgehende Strömung von Elektronen und Protonen, die sich mit einer Geschwindigkeit $u \ll c$ im interplanetaren Magnetfeld $\underline{B}$ bewegt. Da sich die Ladungen von Elektronen und Protonen ausgleichen, misst ein mit dem Sonnenwind mitbewegter Beobachter (Bezugssystem Σ) kein elektrisches Feld. Im Gegensatz dazu kann ein ruhender Satellit (Σ') ein elektrisches Feld $\underline{E}'$ messen. Zeigen Sie

$$\underline{E}' = -\underline{u} \times \underline{B} \quad . \quad (3)$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

23. Mehrfache Lorentztransformation

(4 Punkte)

Es werden zwei spezielle Lorentz-Transformationen ausgeführt. Das System Σ' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_1 gegenüber dem System Σ . Das System Σ'' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_2 gegenüber Σ' . Zeigen Sie, dass die Transformation von Σ zu Σ'' wieder eine Lorentz-Transformation ist, wobei die Relativgeschwindigkeit von Σ und Σ'' der relativistischen Geschwindigkeits-Addition der beiden Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 entspricht.