



18. Relativistischer Doppler-Effekt

(9 Punkte)

Betrachten Sie eine ebene elektromagnetische Welle der Form $\Phi(\underline{r}, t) = \sin(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$ mit $\omega = ck$.

- Zeigen Sie zunächst: Wenn $\underline{R} = (x_1, x_2, x_3, ct)$ ein Tensor 1. Stufe ist und die Phase $\varphi = \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t$ invariant unter Lorentz-Transformation ist (Tensor 0. Stufe), dann ist $\underline{K} = (k_1, k_2, k_3, \omega/c)$ ebenfalls ein Tensor 1. Stufe
- Ein Beobachter, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v} = (v, 0, 0)$ in x_1 -Richtung bewegt, sieht die ebene Welle $\Phi(\underline{r}', t') = \sin(\underline{k}' \cdot \underline{r}' - \omega' t')$. Bestimmen Sie $\underline{k}'(\underline{k})$ und $\omega'(\omega, \alpha)$, wobei α den Winkel zwischen $\underline{v}$ und $\underline{k}$ bezeichnet.
- Die Änderung der Frequenz $\omega \rightarrow \omega'$ aufgrund der Relativbewegung beider Inertialsysteme bezeichnet man als *relativistischen Doppler-Effekt*. Wir betrachten ein konkretes Beispiel: Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, bei der infolge des relativistischen Doppler-Effekts eine in Fahrtrichtung liegende rote Ampel grün erscheint.
- Ein Raumschiff bewege sich mit $v = 0.999c$ auf die Sonne zu. In welchem Spektralbereich wird das im Ruhesystem der Sonne ausgesandte sichtbare Licht und die im Ruhesystem der Sonne ausgesandte Infrarot-Strahlung von einem Beobachter im Raumschiff wahrgenommen?

19. Lorentz-Transformation I: Allgemeine Lorentz-Transformation

(4 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ haben zwei Inertialsysteme Σ und Σ' den gleichen Ursprung und parallele x_3 -Achsen. Der Winkel zwischen der x_1 - und der x'_1 -Achse bei $t = t' = 0$ sei $\alpha > 0$. Geben Sie die Transformationsmatrix zwischen diesen beiden Inertialsystemen an, wobei die Relativgeschwindigkeit des Ursprungs von Σ' aus der Sicht von Σ durch $\underline{v} = v_0 \underline{e}_1$ gegeben ist.

Es soll das Rechnen im Tensor-Kalkül geübt werden.

- (a) Zeigen Sie unter expliziter Anwendung der speziellen Lorentz-Transformation, dass der metrische Fundamentaltensor g_{ij} invariant ist.
- (b) Zeigen Sie: Die Spur $\text{tr}(\underline{\underline{C}}) = C^i{}_i$ eines Lorentz-Tensors $\underline{\underline{C}}$ zweiter Stufe ist ein Lorentz-Tensor 0. Stufe (Lorentz-Skalar).
- (c) Die Beziehung $A^i = C^{ij}B_j$ gelte in jedem Inertialsystem, wobei A^i, B^i die kontravarianten Komponenten von Lorentz-Tensoren 1. Stufe (Lorentz-Vektoren) sind. Folgern Sie, dass dann C^{ij} die kontravarianten Komponenten eines Lorentz-Tensors 2. Stufe sind.

Bemerkung: Diese Schlussfolgerung repräsentiert eine spezielle Form des sogenannten *Quotientensatzes*.