



13. Fresnelsche Formeln

(20 Punkte)

Eine ebene elektromagnetische Welle

$$\underline{E}^I = \underline{E}_0^I e^{i(\underline{k}^I \cdot \underline{x} - \omega^I t)} \quad ; \quad \underline{B}^I = \frac{1}{\omega^I} \underline{k}^I \times \underline{E}^I$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen isotropen Isolatoren mit den Permittivitätszahlen $\epsilon_1 \neq 1$ und $\epsilon_2 \neq 1$ sowie den Permeabilitätszahlen $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\underline{e}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1 und breite sich in der $x_1 - x_3$ -Ebene aus.

- Welche Randbedingungen müssen die Felder $\underline{E}$, $\underline{D}$, $\underline{H}$, $\underline{B}$ bei $x_3 = 0$ erfüllen? Folgern Sie aus den allgemeinen Stetigkeitsbedingungen Beziehungen für die Komponenten der einfallenden (I), reflektierten (R) und transmittierten Felder (T).
- Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\underline{E}^{R,T} = \underline{E}_0^{R,T} e^{i(\underline{k}^{R,T} \cdot \underline{x} - \omega^{R,T} t)} \quad .$$

Geben Sie die Dispersionsbeziehung $\omega(k)$ in beiden Medien an. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\omega^I = \omega^R = \omega^T \quad (1)$$

$$|\underline{k}^R| = |\underline{k}^I| \quad ; \quad |\underline{k}^T| = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} |\underline{k}^I| \quad (2)$$

$$k_2^I = k_2^T = k_2^R = 0 \quad ; \quad k_1^I = k_1^T = k_1^R \quad . \quad (3)$$

- Nutzen Sie diese Beziehungen aus, um das Reflexionsgesetz "Einfallswinkel=Ausfallswinkel", sowie $k_3^R = -k_3^I$ und das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.
- Folgern Sie aus den Maxwell'schen Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:

$$\text{TE - Welle : } \{E_2, B_1, B_3\} \quad ; \quad \text{TM - Welle : } \{B_2, E_1, E_3\}$$

(TE: transversal-elektrische Welle, TM: transversal-magnetische Welle).

- Formulieren Sie alle Randbedingungen aus Aufgabenteil (a) so, dass sich Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\underline{E}_0^R$ und $\underline{E}_0^T$ der reflektierten und der transmittierten Welle ergeben. Ermitteln Sie für die TM-Welle die Verhältnisse $t = |\underline{E}_0^T|/|\underline{E}_0^I|$ und $r = |\underline{E}_0^R|/|\underline{E}_0^I|$ und stellen Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 dar. Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels für $\epsilon_1 = 2$ und $\epsilon_2 = 4$. Diskutieren Sie den Verlauf.

(f) In Teilaufgabe (e) sollte sich für die reflektierte Welle

$$\frac{E_0^R}{E_0^I} = \frac{\epsilon_2 \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha}}{\epsilon_2 \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha}} \quad (4)$$

ergeben, wobei α den Einfallswinkel der Welle bezeichnet. Bestimmen Sie aus dieser Beziehung den *Brewster-Winkel* α_B . Das ist derjenige Einfallswinkel, bei dem die reflektierte Welle verschwindet.

14. Zusatzaufgabe

(8 Zusatzpunkte)

Ausgehend von den Ergebnissen in Aufgabe 13:

- (a) Nehmen Sie an, eine beliebig polarisierte Welle falle unter dem Brewster-Winkel α_B auf die Grenzfläche ein. Welche Polarisation beobachtet man dann im reflektierten Strahl und in welche Richtung zeigt $\underline{E}^R$?
- (b) Betrachten Sie den Fall, dass das Licht vom optisch dichteren auf das optisch dünnere Medium einfällt ($\epsilon_2 < \epsilon_1$). Bestimmen Sie denjenigen Winkel α_{total} , ab dem Totalreflexion eintritt. Begründen Sie, dass k_3^T für $\alpha > \alpha_{total}$ imaginär wird und zeigen Sie, dass die reflektierte Welle und die transmittierte Welle im Fall der Totalreflexion jeweils eine Phasenverschiebung δ^R, δ^T bezogen auf die einfallende Welle aufweisen. Ermitteln Sie δ^R und δ^T als Funktion von $\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha$. Geben Sie reelle Lösungen für $\underline{E}^T(\underline{x}, t)$ und $\underline{B}^T(\underline{x}, t)$ für $\alpha > \alpha_{total}$ an.