Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

ELEKTRODYNAMIK SS 2021

5. Übungsblatt Abgabe: 18. Mai 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

10. Klassische Lebensdauer eines Wasserstoffatoms (4 Punkte)

Klassisch nimmt man an, dass sich Elektronen auf Kreisbahnen um den Kern bewegen. Da eine Kreisbewegung jedoch eine beschleunigte Bewegung darstellt, strahlt das Elektron gemäß der Larmor-Gleichung Energie ab. Dieser Energieverlust würde dazu führen, dass ein Elektron innerhalb kürzester Zeit in den Atomkern stürzt.
In dieser Aufgabe soll die Zeitskala dieses Prozesses für das Wasserstoffatom abgeschätzt werden. Nehmen Sie dazu an, dass das Elektron zunächst im Abstand a_0 (Bohrscher Radius) um das Proton kreist. Außerdem sei die Energie des Elektrons näherungsweise durch seine potentielle Energie $U_{pot} = -q\Phi$ im Potential Φ des punktförmigen positiven Kerns, wobei $q > 0$ gilt, gegeben. Verwenden Sie nun die Larmor-Gleichung um über die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für den Kernabstand $a(t)$ zu gelangen, aus der sich die Zeit τ ergibt, nach der das Elektron den Kern erreicht. Geben Sie die Berechnungsformel für τ an. Setzen Sie anschließend konkrete Zahlenwerte ein und diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis:

Die abgestrahlte Intensität I entspricht dem Verlust der Energie des Elektrons: $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -I$.
Innerhalb einer Periode ändert sich der Abstand des Elektrons vom Kern nur wenig. Approximieren Sie

$$\begin{aligned} \langle r(t) \rangle &= a(t) \\ \left\langle \frac{1}{r(t)} \right\rangle &= \frac{1}{a(t)} \\ \left\langle \frac{1}{r^4(t)} \right\rangle &= \frac{1}{a^4(t)} \end{aligned}$$

wobei $\langle ... \rangle$ die Mittelung über eine Periode und $r(t) = |\underline{x}(t)|$ darstellen. Benutzen Sie zum einen die Bewegungsgleichung für das Elektron und mitteln Sie diese geeignet. Benutzen Sie zum anderen den Virialsatz für das Coulomb-Potential. Die Kombination von beidem liefert eine leicht lösbare Dgl. für $a(t)$.

Bitte wenden ⟶

11. **Dipolstrahlung** **(16 Punkte)**

In der Vorlesung (Kapitel II, Abschnitt 10) wurde die Reihenentwicklung des retardierten Vektorpotentials

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\underline{j}(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \tag{1}$$

für große Entfernungen r von einer inselartigen Quellverteilung $\rho(\underline{x}',t), \underline{j}(\underline{x}',t)$ diskutiert. Im folgenden betrachten wir lediglich den ersten Summanden dieser Entwicklung, wobei wir uns auf das Vakuum ($\mu = \epsilon = 1$) beschränken:

$$\underline{A}_1(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{mit} \quad \underline{p}(t) = \int \mathrm{d}^3x'\underline{x}'\rho(\underline{x}',t) \quad . \tag{2}$$

Dieser Term soll nun für den Spezialfall einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\underline{x},t) = \rho(\underline{x})\exp(-i\omega t) \quad \text{bzw.} \quad \underline{j}(\underline{x},t) = \underline{j}(\underline{x})\exp(-i\omega t) \tag{3}$$

explizit ausgewertet und diskutiert werden. Dies führt zur sog. *Dipolstrahlung.*

(a) Zeigen Sie, dass die Auswertung von Gl. (2) auf die Form

$$\underline{A}_1(\underline{x},t) = \underline{A}_1(\underline{x})\exp(-i\omega t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}_1(\underline{x}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\underline{\mathcal{P}}\,\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{4}$$

und dem zeitunabhängigen Dipolmoment

$$\underline{\mathcal{P}} = \int \mathrm{d}^3x'\,\underline{x}'\,\rho(\underline{x}') \tag{5}$$

führt. Die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ ist wiederum durch $\omega = ck$ festgelegt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gl. (4) die magnetische Induktion $\underline{B}_1(\underline{x},t) = \underline{B}_1(\underline{x})\exp(-i\omega t)$ und ermitteln Sie damit aus dem Gesetz von Ampère die elektrische Feldstärke $\underline{E}_1(\underline{x},t) = \underline{E}_1(\underline{x})\exp(-i\omega t)$ für jeweils große Entfernungen von der Quellverteilung (d.h. unter Vernachlässigung von Termen $\sim 1/r^2$). Sie sollten dann in dieser sog. Strahlungsnäherung

$$\underline{B}_1(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}ck^2\frac{\exp(ikr)}{r}\underline{e}_r \times \underline{\mathcal{P}} \quad \text{sowie} \quad \underline{E}_1(\underline{x}) \approx c\underline{B}_1(\underline{x}) \times \underline{e}_r \tag{6}$$

erhalten, wobei $\underline{e}_r = \frac{\underline{x}}{r}$. Diskutieren Sie den Feldverlauf von $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$.

(c) Bestimmen Sie den zeitlichen Mittelwert des zu $\underline{E}_1$ und $\underline{B}_1$ gehörenden Poynting-Vektors $\underline{\Pi}_1$. Machen Sie sich dafür zunächst klar, dass dieser Mittelwert in der Form

$$\langle\underline{\Pi}_1\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\,[\underline{E}_1^\star(\underline{x}) \times \underline{B}_1(\underline{x})] = \frac{1}{2\mu_0}\,[\underline{E}_1(\underline{x}) \times \underline{B}_1^\star(\underline{x})] \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation. Skizzieren Sie die Abhängigkeit des Betrages $|\langle\underline{\Pi}_1\rangle|$ vom Winkel zwischen $\underline{e}_r$ und $\underline{\mathcal{P}}$.

(d) Berechnen Sie die Leistung (gesamter Energiefluss) I, die im zeitlichen Mittel abgestrahlt wird.

Bitte wenden $\longrightarrow$

12. **Sendeantenne Dipolstrahlung** **(4 Bonuspunkte)**

Als Modell für eine Sendeantenne betrachten wir einen unendlich dünnen, geraden Leiter entlang der x_3-Achse, für dessen Ausdehnung $-L/2 < x_3 < +L/2$ gilt. In diesem Leiter fließt ein Strom mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\exp(i\omega t)$, dessen Amplitude in der Mitte I_0 ist und zu den Enden hin linear auf null abfällt.

(a) Geben Sie die *Linien*stromdichte $\underline{j}(\underline{x}, t)$ für diesen Strom an und ermitteln Sie aus der Kontinuitätsgleichung die Ladungsdichte $\rho(\underline{x}, t)$.

(b) Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment der Antenne und daraus die gesamte im Mittel abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von ω und I_0.

Hinweis: Für (b) können Sie auf Ihr Ergebnis aus der Aufgabe 11(d) zurückgreifen.