


**8. Retardierte Potentiale: Rotierende Kugel**
**(14 Punkte)**

Eine homogen geladene Vollkugel  $\mathcal{K}$  mit dem Radius  $R$  und der Gesamtladung  $Q$  beginne zur Zeit  $t = 0$  um die  $\underline{e}_3$ -Achse durch ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkelbeschleunigung  $\underline{\alpha}$  zu rotieren. Der Mittelpunkt der Kugel sei  $\underline{0}$ .

- (a) Konstruieren Sie die Ladungsdichte  $\rho(\underline{x}, t)$  und die Stromdichte  $\underline{j}(\underline{x}, t)$  innerhalb und außerhalb der Kugel.
- (b) Skizzieren Sie die Kugel, den Aufpunkt  $\underline{x}$  (mit  $|\underline{x}| = r$ ) außerhalb der Kugel ( $r > R$ ) und den Einflussbereich um den Aufpunkt, der das Signal zur Zeit  $t \geq 0$  am Aufpunkt beeinflussen kann für die drei Situationen
  - i.  $ct \leq r - R$
  - ii.  $r - R \leq ct \leq r + R$
  - iii.  $r + R \leq ct$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet.

- (c) Bestimmen Sie mittels der retardierten Potentiale das von dieser Ladungs- und Stromverteilung erzeugte elektromagnetische Feld (also  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$ ) in den Raumpunkten  $\underline{x}$  mit  $r > R$  und für Zeiten  $t$  mit  $ct \leq r - R$  bzw.  $ct \geq r + R$ .
- (d) Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und interpretieren Sie die einzelnen Beiträge zu  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  anhand der Skizze aus (b). Erläutern Sie insbesondere die Zeitabhängigkeit von  $\underline{E}(\underline{x}, t)$  und  $\underline{B}(\underline{x}, t)$  für  $r > R$  für die Zeitbereiche (b)i. und (b)iii.

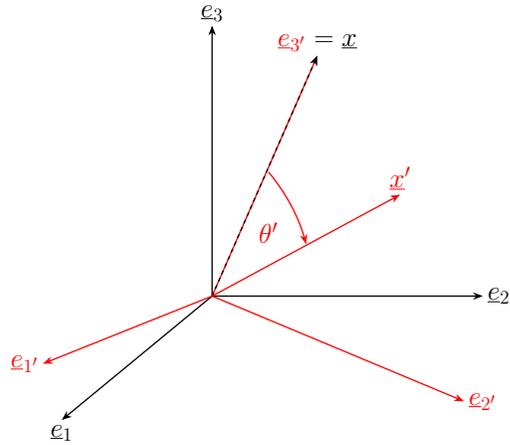
*Hinweise:*

- Ausnutzen von  $|\dots| = \sqrt{(\dots) \cdot (\dots)}$ , Verwendung von Kugelkoordinaten  $(r', \theta', \varphi')$  und mehrfaches Substituieren führt zu elementar rechenbaren Integralen.
- Zeigen Sie für die Berechnung des Potentials  $\Phi$

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' = 2\pi \int_0^R \frac{|r + r'| - |r - r'|}{r r'} r'^2 dr'$$

indem Sie für einen festen Beobachtungspunkt  $\underline{x}$  das Koordinatensystem für  $\underline{x}'$  so wählen, dass der Polarwinkel (die Poldistanz)  $\theta'$  den Winkel zwischen  $\underline{x}$  und  $\underline{x}'$  beschreibt (s. Skizze).

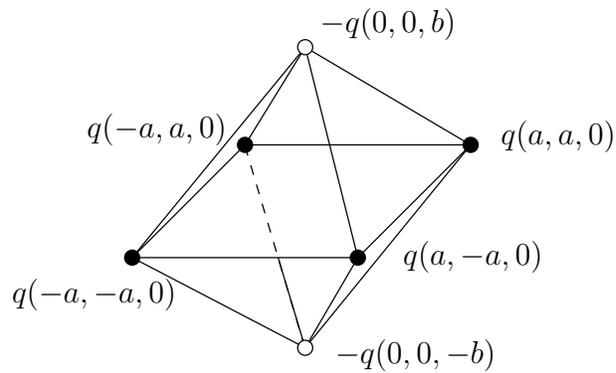
- Setzen Sie für Berechnung des Vektorpotentials  $\underline{A}$  ebenfalls ohne Einschränkung  $\underline{x} = r \underline{e}_3$  (s. Skizze).
- $\int \frac{u}{\sqrt{au+b}} du = \frac{2au-4b}{3a^2} \sqrt{au+b}$  für  $a, b = \text{const.}$



### 9. Multipolentwicklung: Beispiele

(6 Punkte)

Es sollen Monopol- und Dipolmoment für zwei konkrete Ladungsverteilungen berechnet werden:



- Für die skizzierte Anordnung von sechs Punktladungen.
- Für einen Zylinder mit Radius  $R$  und Länge  $L$ , der mit der homogenen Ladungsdichte

$$\rho(\underline{x}) = \{\rho_0; \text{ für } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$$

belegt ist.