INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

3. Übungsblatt — Abgabe: 4. Mai 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

5. **Kugelschale im homogenen elektrischen Feld** **(9 Punkte)**

Wir wollen nun eine Anwendung der Legendre-Polynome kennen lernen. Dazu betrachten wir eine leitende dünne Kugelschale mit Radius R in einem statischen elektrischen Feld, das in größerer Entfernung von der Kugel homogen ist,

$$\underline{E}(r \to \infty) = \underline{E}_\infty = E_0 \underline{e}_3 \quad . \tag{1}$$

Der Koordinatenursprung soll im Mittelpunkt der Kugel liegen. Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(\underline{x})$ inner- und außerhalb der Kugelschale.

(a) Begründen Sie zunächst, dass sich die allgemeine Lösung für $\Phi(\underline{x})$ schreiben lässt als

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad , \tag{2}$$

wobei $P_l(\cos\theta)$ die Legendre-Polynome darstellen.

Das Problem besteht jetzt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l aus den Randbedingungen. Die Entwicklungskoeffizienten a_l, b_l im Innenraum $(r < R)$ unterscheiden sich natürlich von denen im Außenraum $(r > R)$.

(b) Auf der Kugeloberfläche sei das Potential konstant,

$$\Phi(R,\theta) = \Phi_0 \quad . \tag{3}$$

Geben Sie das elektrische Feld im Inneren der Kugel an und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten a_l und b_l für das Potential im Innenraum $(r < R)$.

(c) Geben Sie das Potential $\Phi(r,\theta)$ und die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten im Außenraum der Kugelschale an.

(d) Diskutieren Sie den Verlauf der Feldlinien und der Äquipotentiallinien und skizzieren Sie diese.

Bitte wenden ⟶

6. **Elektrischer Dipol** **(7 Punkte)**

Ein elektrischer Dipol im Vakuum werde konstruiert durch Positionierung einer positiven Punktladung $(+Q)$ bei $\underline{x} = +a\underline{e}_1$ und einer negativen Punktladung $(-Q)$ bei $\underline{x} = -a\underline{e}_1$ mit $Q > 0$, $a > 0$.

(a) Stellen Sie die Formel für die Ladungsdichte $\rho(\underline{x})$ auf.

(b) Berechnen Sie das Skalarpotential $\Phi(\underline{x})$ über das Integral für das Coulomb-Potential.

(c) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{x})$.

(d) Skizzieren Sie die $\underline{E}$-Feldlinien und die Äquipotentialflächen, d.h. Flächen, für die gilt $\Phi = \text{const.}$

(e) Beweisen Sie, dass für große Entfernungen vom Dipol $(r \gg a)$ gilt

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a x_1}{r^3} \tag{4}$$

(f) Bestimmen Sie für dieses Fernfeld $(r \gg a)$ wiederum die elektrische Feldstärke $\underline{E}(\underline{x})$.

7. **Feld eines magnetischen Dipols** **(4 Punkte)**

Das Vektorpotential eines magnetischen Dipols im Vakuum ist gegeben durch

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{x}}{r^3} \quad . \tag{5}$$

$\underline{m}$ ist das (ortsunabhängige) magnetische Dipolmoment.

(a) Zeigen Sie, dass sich die magnetische Induktion eines Dipols dann schreiben lässt als

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\underline{x}(\underline{m} \cdot \underline{x}) - \underline{m}\, r^2}{r^5} \quad . \tag{6}$$

(b) Skizzieren Sie die Feldlinien von $\underline{B}(\underline{x})$.

(c) Zeigen Sie explizit mit Hilfe von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention, dass die in (a) angegebene magnetische Induktion $\underline{B}(\underline{x})$ für ein beliebig orientiertes Dipolmoment $\underline{m}$ divergenzfrei ist.