INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

ELEKTRODYNAMIK SS 2021

2. Übungsblatt Abgabe: 27. April 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

3. **Elektromagnetische Potentiale** **(14 Punkte)**

Das Rechnen mit Potentialen soll trainiert werden.

Bereitstellung von Relationen für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder $\underline{A}, \underline{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

i. $\partial_{\underline{x}} \left(\underline{A} \cdot \underline{B}\right) = \left(\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}\right) \underline{A} + \left(\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}\right) \underline{B} + \underline{B} \times \left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\right) + \underline{A} \times \left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}\right) \quad ;$

ii. $\partial_{\underline{x}} \times \left(\underline{A} \times \underline{B}\right) = \left(\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}\right) \underline{A} - \left(\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}\right) \underline{B} + \underline{A} \left(\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}\right) - \underline{B} \left(\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}\right) \quad .$

Dabei bezeichnet $\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}$ den Differentialoperator, der sich durch das formale Skalarprodukt des Vektorfeldes $\underline{A}$ mit $\partial_{\underline{x}}$ ergibt.

(a) *Lemma:* Sei s_{ij} eine symmetrische Größe (z.B. Matrix, Operator, Tensor etc.), d.h. $s_{ij} = s_{ji}$ und sei a_{ij} eine antisymmetrische Größe, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}$. Beweisen Sie:
Die Spur des Produktes einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Größe verschwindet, also

$$s_{ij} a_{ji} = 0. \tag{1}$$

(b) Betrachten Sie die zeitunabhängige (statische) Form des Faraday-Gesetzes:

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = 0 \quad . \tag{2}$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise, Summenkonvention und Lemma (a), dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}} \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{3}$$

gelöst wird.

(c) Zeigen Sie, dass Φ in der Form

$$\Phi\left(\underline{x}\right) = -\int_{\infty}^{1} \underline{E}\left(\tau \underline{x}\right) \cdot \underline{x} \, \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

dargestellt werden kann, wenn die elektrische Feldstärke im Unendlichen hinreichend schnell verschwindet.

(d) Betrachten Sie die elektrische Feldstärke einer Punktladung Q im Ursprung $\underline{x} = 0$ und im Vakuum:

$$\underline{E}(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\underline{x}}{r} \quad , \quad r = |\underline{x}| \tag{5}$$

Skizzieren Sie $\underline{E}$. Überzeugen Sie sich davon, dass $\underline{E}$ wirbelfrei ist.

(e) Für die Punktladung Q im Ursprung und im Vakuum gilt das Potential

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad . \tag{6}$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis mit Hilfe der Formel aus (c), indem Sie $\underline{E}$ aus (d) einsetzen.

Bitte wenden ⟶

(f) Magnetfelder haben keine Quellen:

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad . \tag{7}$$

Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise, Summenkonvention und Lemma (a), dass diese Gleichung durch den Ansatz

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad \text{mit} \quad \underline{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{8}$$

gelöst wird. Das Feld $\underline{A}$ ist das sog. *Vektorpotential.*

(g) Zeigen Sie, dass $\underline{A}$ in der Form

$$\underline{A}(\underline{x}) = \int_0^1 \underline{B}\,(\tau \underline{x}) \times (\tau \underline{x})\, \mathrm{d}\tau \tag{9}$$

dargestellt werden kann, wobei das Integral über den $\mathbb{R}^3$-wertigen Integranden komponentenweise aufzufassen ist.

(h) Betrachten Sie die magnetische Induktion

$$\underline{B} = (x_1 x_3 - 2x_3)\, \underline{e}_1 - x_2 x_3 \underline{e}_2 + x_1 \underline{e}_3 \quad . \tag{10}$$

Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass $\underline{B}$ quellenfrei ist.

(i) Bestimmen Sie ein geeignetes Vektorpotential $\underline{A}$ mit der Formel aus (g) für die magnetische Induktion aus (h).

4. Feld einer elektrischen Punktladung **(6 Punkte)**

(a) Leiten Sie im zeitunabhängigen Fall und im Vakuum die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{11}$$

aus dem Faraday- und dem Gauß-Gesetz ab.

(b) Für eine Punktladung Q im Ursprung gilt

$$\rho(\underline{x}) = Q\delta(\underline{x}) \tag{12}$$

mit der Delta-Distribution $\delta(\underline{x})$. Die Poisson-Gleichung ergibt sich zu

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\underline{x}) \quad . \tag{13}$$

Überprüfen Sie, dass das in Aufgabe 3(e) angegebene Potential die Poisson-Gleichung erfüllt. Zeigen Sie dazu mit Hilfe der Definition der Delta-Distribution und des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\partial_{\underline{x}}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\underline{x}) \tag{14}$$

gilt.