



1. Eindimensionale Delta-Distribution

Die eindimensionale Delta-Distribution ist durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

definiert.

(a) Berechnen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \delta(x) dx$

(b) Berechnen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x+1)}{x^2+4} dx$

(c) Zeigen Sie: $d_x \Theta(x) = \delta(x)$, wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion bezeichnet.

2. Mehrdimensionale Delta-Distribution

Die dreidimensionale Delta-Distribution ist durch

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\underline{x}) \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) d^3x = f(\underline{x}_0)$$

definiert. Drücken Sie $\delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$ explizit durch die eindimensionale Delta-Distribution $\delta(x)$ in

- (a) kartesischen Koordinanten
- (b) Zylinderkoordinaten
- (c) Kugelkoordinaten

aus.

Bitte wenden →

3. Legendre-Polynome

Auf dem vorherigen Übungsblatt haben wir die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} d_x^l (x^2 - 1)^l$$

kennen gelernt. Im Folgenden sollen weitere Eigenschaften dieser Polynome hergeleitet werden.

- (a) Berechnen Sie die ersten fünf Legendre-Polynome $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ und $P_4(x)$.
- (b) Die normierten Legendre Polynome

$$\tilde{P}_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x)$$

bilden einen vollständigen Satz orthonormierter Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$. Das bedeutet, dass sich Funktionen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l$ darstellen lassen:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \tilde{P}_l(x)$$

Stellen Sie die Funktion $f(x) = x^3$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l(x)$ dar.

4. Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

Die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l$$

wird als *erzeugende Funktion* einer Folge a_l bezeichnet. Beispielsweise ist die geometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l = \frac{1}{1-x}$$

für $|x| < 1$ die erzeugende Funktion der konstanten Folge $a_l = 1$.

Im Folgenden wollen wir die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome kennen lernen.

- (a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2xt}},$$

wobei t einen festen Parameter darstellt. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt $x = 0$.

- (b) Entwickeln Sie nun die Funktion

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|}$$

für $|\underline{x}_0| < |\underline{x}|$ in eine Reihe.