

**1. Differentialoperatoren I****(10 Punkte)**

- (a) Berechnen Sie den Gradienten des skalaren Feldes

$$\Psi(\underline{x}) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad \text{für } r \neq 0 \quad . \quad (1)$$

- (b) Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$\underline{F}_1(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{r^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) \quad \text{für } r \neq 0 \quad . \quad (2)$$

- (c) Wenden Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf das skalare Feld

$$\psi(\underline{x}) = \frac{\cos \vartheta}{r} \quad \text{für } r \neq 0 \quad (3)$$

an.

- (d) Geben Sie allgemeine Ausdrücke für die vier Differentialoperatoren (Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator) angewendet auf ein Vektorfeld
- $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$
- bzw. ein Skalarfeld
- Φ
- in Indexschreibweise an.

2. Differentialoperatoren II**(10 Punkte)**

Es sei Ψ ein skalares Feld; $\underline{A}$ und $\underline{B}$ seien Vektorfelder. Zeigen Sie unter Benutzung von Komponentenschreibweise und Einsteinscher Summenkonvention:

- (a) $\partial_{\underline{x}} \cdot (\Psi \underline{A}) = \Psi \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A} + \underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}} \Psi$;
 (b) $\partial_{\underline{x}} \times (\Psi \underline{A}) = \Psi \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} - \underline{A} \times \partial_{\underline{x}} \Psi$;
 (c) $\partial_{\underline{x}} \times (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{A} - (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} + \underline{A} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}) - \underline{B} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A})$;
 (d) $\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}) = \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}) - \partial_{\underline{x}}^2 \underline{A}$.

Hinweis: Es ist $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.