INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

ELEKTRODYNAMIK SS 2021

0. Übungsblatt keine Abgabe (Präsenzübung)

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

Einleitendes zur Poisson- und Laplace-Gleichung

Die *Poisson*-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \, \Phi(\underline{x}) = -\varrho(\underline{x}) \tag{1}$$

erlaubt die Berechnung eines Potentials $\Phi(\underline{x})$ einer beliebigen Quellverteilung $\varrho(\underline{x})$. Ist man jedoch an dem Potential in einem quellfreien Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, in dem $\varrho(\underline{x}) = 0$ erfüllt ist, interessiert, so geht die Poisson-Gleichung in die *Laplace*-Gleichung (bei uns meistens mit *Dirichlet*-Randbedingungen) über:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_{\underline{x}}^2 \, \Phi(\underline{x}) & = & 0\,, & \text{in } \Omega \\ \Phi(\underline{x}) & = & f(\underline{x})\,, & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right. \quad , \tag{2}$$

wobei $f(\underline{x})$ eine stetige Funktion auf $\partial\Omega$ beschreibt. Im Folgenden wollen wir die Lösung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten, in Kugelkoordinaten für zylindersymmetrische Probleme und Polarkoordinaten bestimmen.

1. **Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten**

   Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \, \Phi = 0$ im Gebiet

   $$\mathcal{G} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x_1 \leq a,\, 0 \leq x_2 \leq b\} \quad .$$

   Geben Sie $\Phi(\underline{x})$ allgemein mit Hilfe des Separationsansatzes $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ an. Zeigen Sie dazu, dass $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung hat dann die Form

   $$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)W_n(x_2).$$

Bitte wenden →

2. **Laplace-Gleichung für zylindersymmetrische Probleme**

Die Laplace-Gleichung $\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = 0$ soll für den Spezialfall einer zylindersymmetrischen Geometrie gelöst werden. Die prinzipielle Vorgehensweise ist Ihnen aus der Quantenmechanik von der Behandlung des Wasserstoffatoms bekannt.

(a) Leiten Sie mit dem Separationsansatz $\Phi(\underline{x}) = P(\cos\theta)\, Q(\varphi)\, U(r)/r$ aus der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\frac{1}{r}\partial_r^2\left(r\,\Phi(\underline{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\Phi(\underline{x})\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2\Phi(\underline{x}) = 0 \tag{3}$$

gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $P(\cos\theta), Q(\varphi)$ und $U(r)$ ab. Zeigen Sie: $Q(\varphi) = \exp(im\varphi)$. Warum sind nur die Werte $m = 0, \pm1, \pm2, \dots$ zugelassen?

(b) Wir betrachten im Folgenden zylindersymmetrische Lösungen von $\partial_{\underline{x}}^2\Phi(\underline{x}) = 0$, d.h., $m = 0$. Für $P(\cos\theta)$ sollten Sie jetzt die DGl.

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0, \quad x = \cos\theta \tag{4}$$

erhalten. λ ist eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l, \quad l \in \mathbb{N} \tag{5}$$

die DGl. (4) lösen.
Hinweis: Für hinreichend glatte Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ gilt

$$\mathrm{d}_x^l(g\cdot h) = \sum_{n=0}^{l}\binom{l}{n}\mathrm{d}_x^n\, g\cdot \mathrm{d}_x^{l-n}\, h,$$

wobei $\binom{l}{n}$ den Binomialkoeffizienten bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass $U_l(r) = a_l\, r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$ die allgemeine Lösung der Radialgleichung, also der DGL für $U(r)$ ist.

Allgemein lässt sich das Potential $\Phi(\underline{x})$ für zylindersymmetrische Probleme demnach darstellen als

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l\, r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \quad . \tag{6}$$

Bemerkung:
Die Legendre-Polyome $\{\tilde{P}_l(x) := \sqrt{(2l+1)/2}\, P_l(x);\ l \in \mathbb{N}\}$ bilden einen *vollständigen* Satz *orthonormierter* Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$. Das bedeutet, dass sich Funktionen $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ als Linearkombination der $\tilde{P}_l$ darstellen lassen:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \tilde{P}_l(x).$$

Bitte wenden →

3. **Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten**

In Polarkoordinaten (r, φ) lässt sich die Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{r}\partial_r \left(r\partial_r \Phi\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \Phi = 0 \tag{7}$$

analog zu den oben behandelten Problemen lösen. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $\Phi(r, \varphi) = U(r)Q(\varphi)$ auf die allgemeine Lösung

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^{n+1} + \frac{b_n}{r^n}\right) \left[c_n \cos(n\varphi) + d_n \sin(n\varphi)\right] \tag{8}$$

führt.