



Klausurvorbereitung

Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

1. Kurvenintegrale

- (a) Eine Kurve C im $\mathbb{R}^3$ sei allgemein durch die Parameterdarstellung $\underline{r}(t)$ gegeben. Die Kurve beginnt mit dem Parameterwert t_a und endet mit t_e . Zudem sei ein Vektorfeld durch $\underline{A} = \partial_{\underline{r}}\Phi$, mit einem skalaren Potential Φ gegeben. Leiten Sie die Berechnungsformel für das Kurvenintegral

$$\int_C \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

her. Erläutern Sie stichpunktartig die Herleitungsschritte.

- (b) Betrachten Sie nun das konkrete Vektorfeld

$$\underline{A} = \cos(x) \underline{e}_1 + \sin(y) \underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

und berechnen Sie das Kurvenintegral entlang eines Kreises in der y - z -Ebene.

2. Extremwertproblem

Bestimmen Sie die Position (x_e, y_e, z_e) und den Wert des Extremums der Funktion

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x + y - z = 0 \quad .$$

Benutzen Sie dazu die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Die Art des Extremums *soll nicht* untersucht werden.

3. Volumenintegrale

- (a) Bestimmen Sie das folgende Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a_0}} dx dy$$

für $a_0 = \text{const.}$ Betrachten Sie dazu den unendlich ausgedehnten 2-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ als Kreis mit unendlich großem Radius.

- (b) Gegeben sei ein Zylinder $\mathcal{Z} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}$ mit der Massendichte $\rho(x, y, z) = \rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho_0 > 0$. Bestimmen Sie die Gesamtmasse des Zylinders.

Bitte wenden $\longrightarrow$

4. Integralsatz von Gauß

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\underline{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz^2 \\ 0 \end{pmatrix} = xz \underline{e}_1 + yz^2 \underline{e}_2 \quad .$$

- (a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\underline{A}$.
- (b) Berechnen Sie für den Würfel $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ explizit das Oberflächenintegral

$$\int_{(\mathcal{W})} \underline{A} \cdot d\mathbf{O} \quad ,$$

d.h. den Fluss des Vektorfeldes $\underline{A}$ durch die Oberfläche $(\mathcal{W})$ des Würfels.

- (c) Wie lautet der Integralsatz von Gauß allgemein? (Angabe der Formel und kurze Erläuterung)
- (d) Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld $\underline{A}$ und den Würfel aus (b).

5. Konservatives Vektorfeld

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \underline{A}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2xye^{-z^2} + (2 - \lambda)z^3 \cos(y^2) \\ x^2e^{-z^2} + (\lambda - 3)xyz^3 \sin(y^2) \\ (\lambda - 3)x^2yze^{-z^2} + 3xz^2 \cos(y^2) \end{pmatrix} \\ &= \left\{ 2xye^{-z^2} + (2 - \lambda)z^3 \cos(y^2) \right\} \underline{e}_1 \\ &\quad + \left\{ x^2e^{-z^2} + (\lambda - 3)xyz^3 \sin(y^2) \right\} \underline{e}_2 \\ &\quad + \left\{ (\lambda - 3)x^2yze^{-z^2} + 3xz^2 \cos(y^2) \right\} \underline{e}_3 \quad , \end{aligned}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

- (a) Bestimmen Sie λ so, dass $\underline{A}$ rotationsfrei (wirbelfrei) ist.
- (b) Bestimmen Sie für den in (a) ermittelten Wert von λ ein Potential des Vektorfeldes $\underline{A}$.

6. Differentialgleichung

Die Bewegungsgleichung eines angetriebenen, gedämpften Oszillators lautet

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = f(x) \quad , \quad y = y(x) \quad .$$

Dabei sind γ und ω_0 positive Konstanten.

In dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall $\gamma > \omega_0$.

- (a) Bestimmen Sie zunächst für $f(x) = 0$ die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der Bewegungsgleichung und skizzieren Sie diese.
- (b) Bestimmen Sie nun für $f(x) = f_0 \cos(\Omega x)$ mit $\Omega = \text{const.}$ die allgemeine Lösung $y(x)$ der Bewegungsgleichung. Verwenden Sie dabei zum Auffinden einer speziellen Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$y_i(x) = a \sin(\Omega x) + b \cos(\Omega x)$$

und vergleichen Sie jeweils die Koeffizienten bezüglich $\sin(\Omega x)$ und $\cos(\Omega x)$.

- (c) Geben Sie $y(x)$ für die Anfangsbedingungen $y(x=0) = y_0$ und $y'(x=0) = 0$ an.