

12. Übungsblatt

Keine Abgabe, Klausurvorbereitung

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik>.

Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

1. Messprozess

Betrachten Sie ein Vierniveausystem mit Hamiltonoperator H und eine Observable A

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte E_n und die zugehörigen *normierten* Eigenvektoren $|n\rangle$ von H ($n = 0, 1, 2, 3$).

Ordnen Sie Eigenwerte- und -vektoren der Größe nach, sodass $E_n < E_m$ für $n < m$ gilt.

- (b) Stellen Sie den Zeitentwicklungsoperator des System

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (2)$$

in der Form

$$U(t) = \sum_{n=0}^3 c_n(t) |n\rangle \langle n| \quad (3)$$

dar und geben Sie die Koeffizienten $c_n(t)$ für $n = 0, 1, 2, 3$ an.

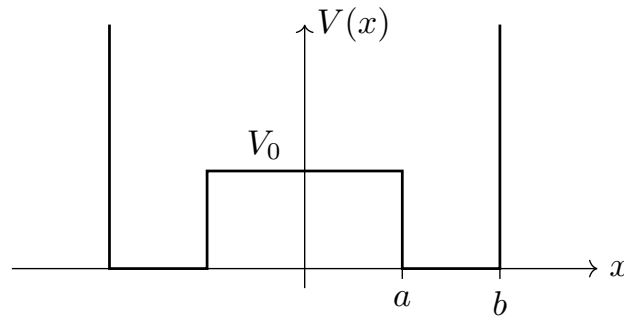
Betrachten Sie nun zusätzlich die Observable A .

- (c) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A an.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten die verschiedenen Eigenwerte von A zu messen, wenn sich das System
- im Grundzustand $|0\rangle$
 - im ersten angeregten Zustand $|1\rangle$
- befindet.
- (e) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\Psi(0) = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2}}$ jeweils in den verschiedenen angeregten Zuständen $|n\rangle$, $n > 0$ befindet? Welchen Erwartungswert weist A zum Zeitpunkt $t = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{2}}$ auf? Nach welcher Zeit T kehrt das System wieder in den Ausgangszustand $(0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$ zurück?

Bitte wenden! →

2. Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in folgendem eindimensionalen Rechteck-Potential



$$V(x) = \begin{cases} \infty & , |x| > b \\ 0 & , a < |x| < b \\ V_0 & , |x| < a \end{cases} \quad (4)$$

mit $a < b$ und $V_0 > 0$.

Betrachten Sie den Fall $0 < E < V_0$.

- Geben Sie die allgemeine Form der Lösung $\phi(x)$ der stationären Schrödingergleichung in den fünf Bereichen an.
- Welche Eigenschaften gelten für die Wellenfunktion $\phi(x)$ und deren Ableitung $\phi'(x)$ in $x = \pm a$, welche in $x = \pm b$?
- Lösen Sie das resultierende Gleichungssystem, indem Sie die Symmetrie des Potentials ausnutzen und zeigen Sie, dass symmetrische Lösungen

$$-k \cot(k(b-a)) = q \tanh(qa), \quad (5)$$

antisymmetrische Lösungen

$$-k \cot(k(b-a)) = q \coth(qa) \quad (6)$$

erfüllen, mit

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}, \quad q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}. \quad (7)$$

- Geben Sie im Grenzfall $V_0 \rightarrow \infty$ einen Ausdruck für die Differenz der Energien des ersten antisymmetrischen und des ersten symmetrischen Zustands an.

Bitte wenden! →

3. Zeitunabhängige Störungstheorie

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator H_0 unter Einfluss einer äußeren Störung W , sodass der Hamiltonoperator des Systems sich schreiben lässt als $H = H_0 + W$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\mu^2 x^2. \quad (8)$$

- (a) Die Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a des ungestörten harmonischen Oszillators sind durch

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\mu}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\mu}}p \quad \text{und} \quad a = \sqrt{\frac{m\mu}{2\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\mu}}p \quad (9)$$

gegeben.

Drücken Sie H_0 durch $a^\dagger$ und a aus und bringen Sie den Hamiltonoperator auf folgende Form

$$H = c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + W. \quad (10)$$

Bestimmen Sie die Konstante c .

- (b) Die Störung W sei gegeben durch

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}} (b_k (a^\dagger)^k + b_k^* (a)^k) \quad (11)$$

wobei $b_k \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass W hermitesch ist und berechnen Sie mithilfe der zeitunabhängigen Störungstheorie die Korrektur zur Grundzustandsenergie E_0 des harmonischen Oszillators bis zur zweiten Ordnung in W .

- (c) Welche Bedingung muss für die b_k gelten, damit die Korrektur zur Grundzustandsenergie endlich bleibt?

- (d) Schätzen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie E_0 für die konkrete Folge $b_k = \frac{1}{k}$ ab.

Geben Sie eine obere und eine untere Schranke durch Approximation der Summe mit einem Integral an.

4. Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Berechnen Sie die von null verschiedenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten zwischen Zuständen $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ und Zuständen $|j_1, j_2, j, m\rangle$ für $j_1 = j_2 = 2$ und $j = 4$ mit $m = 3, 4$ sowie $j = 3$ mit $m = 3$.

Bitte wenden! →

5. Radialsymmetrische Potentiale

Betrachten Sie einen dreidimensionalen modifizierten harmonischen Oszillator mit Potential $V(r) = \frac{m\omega^2}{2}r^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{b}{r^2}$, mit $\ell \gg b \in \mathbb{R}^+$.

(a) Ersetzen Sie

$$b + \ell(\ell + 1) = \tilde{\ell}(\tilde{\ell} + 1) \quad (12)$$

und motivieren Sie den Potenzreihenansatz zur Lösung der radialen Schrödingergleichung

$$\chi_{\tilde{\ell}}(q) = q^{\tilde{\ell}+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k \right) e^{-q^2/2}, \quad q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \quad (13)$$

aus den Grenzfällen $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$.

(b) Zeigen Sie durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes in die radiale Schrödingergleichung, dass die folgende Rekursionsrelation gilt:

$$- [(k + \tilde{\ell} + 3)(k + \tilde{\ell} + 2) - \tilde{\ell}(\tilde{\ell} + 1)] c_{k+2} = \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - (2k + 2\tilde{\ell} + 3) \right] c_k. \quad (14)$$

(c) Leiten Sie aus der Abbruchbedingung $c_k = 0$ für $k > k_{\tilde{\ell}}$ einen Ausdruck für die Eigenenergien $E_{\tilde{\ell}}$ her.

(d) Entwickeln Sie $\tilde{\ell}$ in $b \ll 1$ und schreiben Sie die Eigenenergien in $E_{N,\ell}$ um. Was gilt für die Entartung bezüglich der ℓ -Komponente?