Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

13. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

38. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = x + y$ (b) $x^2y' - 2xy = \frac{1}{x}$ (c) $y' - y = e^x$

Ermitteln Sie dabei die inhomogene Lösung zum einen durch Erraten oder einen einfachen Ansatz und zum anderen durch Variation der Konstanten. Es ist jeweils $y = y(x)$ und $y' = \mathrm{d}_x y$.

Hinweis: Ein geeigneter Ansatz für die inhomogene Lösung von (c) ist: $y_i(x) = (ax + b)e^x$.

39. Nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden nichtlinearen Differentialgleichungen:

(a) $y' = xy^{1/3}$ (b) $y' = e^{3x+2y}$ (c) $y' = \frac{x^2}{\sin(y)}$

Es ist jeweils $y = y(x)$ und $y' = \mathrm{d}_x y$.

40. Harmonischer Oszillator

Die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators, auf den eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft sowie eine externe Kraft wirken, lautet

$$y'' + 2\gamma\, y' + \omega_0^2\, y = f(x) \quad .$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die Auslenkung in Abhängigkeit von x, $\gamma > 0$ die Dämpfungskonstante, $\omega_0 > 0$ die ungedämpfte Eigenfrequenz des Oszillators und $f(x)$ eine externe Kraft. Die Variable x kann dabei exemplarisch als die Zeit aufgefasst werden.

(a) Bestimmen Sie zunächst die Lösung der Differentialgleichung ohne eine externe Kraft, d.h. $f(x) = 0$, für $y(x = 0) = y_0$ und $y'(x = 0) = v_0$. Beachten Sie hierbei die zu treffenden Fallunterscheidungen. Skizzieren Sie die unterschiedlichen Fälle und diskutieren Sie die Lösungen. Machen Sie zunächst auftretende komplexe Lösungen für das Fundamentalsystem reell.

(b) Betrachten Sie nun den Oszillator mit der externen Kraft $y(x) = a = \text{const}$. Bestimmen Sie für $0 < \gamma < \omega_0$ (dies ist der sog. Schwingfall) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (b) für die Anfangsbedingungen $y(x = 0) = y_0$ und $y'(x = 0) = 0$.