Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

11. Übungsblatt

Abgabe: Di, 02.02.2021 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

Δ 48. **Streuung am Potential: Born-Näherung (10 Punkte)**

Betrachten Sie die Born-Näherung

$$f^{(1)}(\vec{K}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3r'\, W(\vec{r}')\, \mathrm{e}^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{r}'} \tag{1}$$

für die Streuung an einem Potential $W(\vec{r})$.

Dabei ist $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}_0$, mit $\vec{k}_0$ dem einfallenden und $\vec{k}$ dem auslaufenden Impuls.

(a) Berechnen Sie den Streuquerschnitt $\left|f^{(1)}(K_x, K_y, K_z)\right|^2$ für das Potential

$$W(x, y, z) = V_0\, \mathrm{e}^{-A|x|}\, \mathrm{e}^{-y^2/B}\, \Theta(z_0 - z)\Theta(z + z_0) \tag{2}$$

mit den Konstanten V_0, $A > 0$, $B > 0$ und $z_0 > 0$.

(b) Gegeben sei nun der Spezialfall eines radialsymmetrischen Potentials $W(\vec{r}) = W(r)$. Wie sieht $K = \left|\vec{K}\right|$ als Funktion des Streuwinkels θ aus ($\vec{k}\cdot\vec{k}_0 = k^2\cos\theta$)?
Zeigen Sie, daß im vorliegenden Fall die erste Born-Näherung für die Streuamplitude wie folgt lautet:

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 K(\theta)}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, W(r)\, \sin(K(\theta)r) \tag{3}$$

(c) Nun werde ein Teilchen der Masse m an einem Potentialtopf

$$W(r) = \begin{cases} -V < 0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \tag{4}$$

gestreut.
Berechnen Sie die erste Born-Näherung für die Streuamplitude $f(\theta)$.

(d) Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta)|^2$ für die erste Born-Näherung aus Teil (c) und diskutieren Sie diesen für kleine Teilchenenergien $ka \ll 1$.
Wie lautet insbesondere der totale Streuquerschnitt σ in diesem Grenzfall?

Bitte wenden! →

49. **Kugelsymmetrische Zentralpotentiale (12 Punkte)**

Die radiale Schrödingergleichung für ein Zentralpotential $V(r)$ ist durch

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\chi_\ell(r)+\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+V(r)\right]\chi_\ell(r)=E\chi_\ell(r) \tag{5}$$

gegeben. In der Vorlesung wurden bereits die allgemeinen Lösungen der DGL für große und kleine r berechnet.

(a) Bestimmen Sie die zu folgendem Potential gehörenden s-Niveaus

$$V(r)=-\alpha\delta(r-a). \tag{6}$$

im Grenzfall $\xi\equiv m\alpha a\hbar^{-2}\gg 1$.

(b) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralpotential, das für $r\to 0$ der Form

$$V(r)\approx\frac{\alpha}{r^s},\quad s<2 \tag{7}$$

ist. Berücksichtigt man die führenden Terme in $\frac{1}{r}$ in der radialen Schrödingergleichung, erhält man als asymptotische Lösung

$$R^{(0)}_{n_r,\ell}(r)=C_{n_r,\ell}r^\ell. \tag{8}$$

Verbessern Sie diese, indem Sie Terme der nächsten Ordnung in $\frac{1}{r}$ berücksichtigen.

(c) Zeigen Sie, dass der Radialimpuls p_r als

$$p_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}\right) \tag{9}$$

geschrieben werden kann und folgern Sie daraus, dass p_r tatsächlich hermitesch ist.

Betrachten Sie nun den konkreten Fall des Wasserstoffatoms mit dem Coulomb-Potential

$$V(r)=-\frac{e^2}{r}\ . \tag{10}$$

(d) In der Vorlesung wurde für die radiale Schrödinger-Gleichung des Wasserstoff-Atoms der Potenzreihenansatz

$$\chi_\ell(\rho)=\rho^{\ell+1}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu\rho^\mu\right)\mathrm{e}^{-\lambda\rho}\quad\text{mit }\lambda=\sqrt{-\epsilon}\ . \tag{11}$$

gemacht. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms ein und leiten Sie durch einen Vergleich der Koeffizienten gleicher ρ-Potenzen eine Rekursionsrelation für die c_μ her.

(e) Zeigen Sie, dass die Folge der c_μ bei einem $\mu=n_r$ abbrechen muss und leiten Sie aus der Abbruchsbedingung den bekannten Ausdruck für die Energieeigenwerte

$$E_n=-\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}\quad\text{mit }n=n_r+\ell+1\quad\text{und }a_0=\frac{\hbar^2}{me^2} \tag{12}$$

des Wasserstoffatoms her.

Bitte wenden! →

50. **Laplace-Lenz-Runge-Vektor (8 Punkte)**

Im klassischen Keplerproblem kann der Laplace-Lenz-Runge-Vektor

$$\vec{\lambda} = -A_0 \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{m}\left(\vec{p} \times \vec{L}\right) \tag{13}$$

als Erhaltungsgröße eingeführt werden. Auch bei der quantenmechanischen Betrachtung des Wasserstoffatoms mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{A_0}{r} \tag{14}$$

kann eine analoge Observable

$$\vec{\Lambda} = -A_0 \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2m}\left(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}\right) \tag{15}$$

eingeführt werden.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $A, \vec{B}$ und $\vec{C}$

$$\left[A, \vec{B} \times \vec{C}\right] = \left[A, \vec{B}\right] \times \vec{C} + \vec{B} \times \left[A, , \vec{C}\right] \tag{16}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\left[\frac{1}{r}, \vec{p}\right] = -i\hbar \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad \left[\vec{p}^2, \frac{\vec{r}}{r}\right] = i\hbar \left(\frac{1}{r^3}\left(\vec{r} \times \vec{L}\right) - \left(\vec{L} \times \vec{r}\right)\frac{1}{r^3}\right) \tag{17}$$

mit $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$.

Hinweis: Durch die Nutzung der Einsteinschen Summenkonvention können Sie viel Schreibarbeit sparen.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b), um zu zeigen, dass der Laplace-Lenz-Runge-Vektor $\vec{\Lambda}$ eine Erhaltungsgröße im Wasserstoffatom-Modell ist, dass also gilt

$$\left[H, \vec{\Lambda}\right] = 0 \ . \tag{18}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass der Drehimpuls ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist, dass also $[H, \vec{L}] = 0$.

51. **Wasserstoffatom (5 Bonuspunkte)**

Zeigen Sie unter Verwendung der radialen Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom

$$\left\langle n, l, m \middle| r^{-2} \middle| n, l, m \right\rangle = \frac{2}{(2\ell + 1)\, n^3 a_0^2} \tag{19}$$

und

$$\left\langle n, l, m \middle| r^{-3} \middle| n, l, m \right\rangle = \frac{2}{\ell\,(\ell + 1)\,(2\ell + 1)\, n^3 a_0^3} \tag{20}$$

wobei $|n, l, m\rangle$ die Eigenzustände des Wasserstoffatoms und $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ der Bohrsche Radius ist.

Hinweis: Drücken Sie den Energieeigenwert als Funktion der radialen Quantenzahl n_r und ℓ aus. Lassen Sie dann in der radialen Schrödingergleichung reelle ℓ zu und differenzieren Sie beide Seiten nach ℓ bzw. $\rho = r/a_0$.