Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

12. Übungsblatt — Abgabe: 2. Februar 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

35. Potential eines Vektorfeldes **(4 Punkte)**

Die Folgerungen aus dem Stokesschen Integralsatz in der Vorlesung liefern eine Bedingung für die Existenz eines Potentials ϕ zu einem Vektorfeld $\underline{A}$: $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A} = 0 \Rightarrow \underline{A} = \partial_{\underline{r}}\phi$. Wir betrachten nun die Vektorfelder

$$\underline{A}(x^1,x^2,x^3) = \begin{array}{r} \left[4(x^2)^2 + 3x^3\right] \underline{e}_1 \\ + \left[8x^1x^2 - 8(x^3)^3\right] \underline{e}_2 \\ + \left[-24x^2(x^3)^2 + 3x^1\right] \underline{e}_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \underline{B}(x^1,x^2,x^3) = \begin{array}{r} \left[x^1x^3 + 3x^1\right] \underline{e}_1 \\ + \left[3x^2x^3\right] \underline{e}_2 \\ + \left[(x^2)^2 + (x^3)^4\right] \underline{e}_3 \end{array} \quad .$$

Überprüfen Sie, welche dieser Vektorfelder ein Potential besitzen und bestimmen Sie dies ggf.

Hinweis: Eine gängige Methode zur Bestimmung des Potentials ist zunächst die Stammfunktion einer Komponente bzgl. der entsprechenden Koordinate zu berechnen, das heißt z.B. $\int A^1(x^1,x^2,x^3)\,\mathrm{d}x^1$. Dadurch erhält man eine Stammfunktion mit einer Integrationskonstanten, die immer noch von x^2 und x^3 abhängen kann. Um diese Konstante zu bestimmen, bildet man die partielle Ableitung bzgl. einer dieser beiden Koordinaten und vergleicht sie mit der entsprechenden Komponente des Vektorfeldes. Dies wird dann für die letzte Koordinate wiederholt, um das Potential zu erhalten.

36. Integralsatz von Gauß **(8 Punkte)**

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und (V) dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x^1,x^2,x^3)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \partial_{\underline{r}} \cdot \underline{A}\,\mathrm{d}V = \oint_{(V)} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \quad .$$

(a) Rechnen Sie diese Formel für die geschlossene Oberfläche der Halbkugel $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq R^2$ und $x^3 \geq 0$ und das Vektorfeld

$$\underline{A} = \ x^1x^2\underline{e}_1 + x^2x^3\underline{e}_2 - x^3\underline{e}_3 \quad .$$

explizit nach.

(b) **Zusatzaufgabe** **(8 Zusatzpunkte)**

Wiederholen Sie (a) für einen Zylinder um die x^3-Achse mit Radius R und Höhe von $-d$ bis d und dem Vektorfeld

$$\begin{aligned} \underline{A} = \ & \left(x^1 e^{-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} - x^2\right)\underline{e}_1 \\ & + \left(x^2 e^{-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} - x^1\right)\underline{e}_2 \\ & + \sin\left(\frac{\pi x^3}{2d}\right)\underline{e}_3 \end{aligned}$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

37. **Integralsatz von Stokes** **(8 Punkte)**

Es sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beliebig geformte Oberfläche und (O) deren Randkurve. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{A}(x^1, x^2, x^3)$. Dann besagt der Integralsatz von Stokes:

$$\int_O \partial_{\underline{r}} \times \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{O} = \oint_{(O)} \underline{A} \cdot \mathrm{d}\underline{r} \quad .$$

(a) Rechnen Sie diese Formel für die Ellipse $\left(\frac{x^1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \leq 1$ und $x^3 = 0$ und das Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(\frac{4}{3}x^1 - 2x^2\right)\underline{e}_1 + \left(3x^2 - x^1\right)\underline{e}_2 \quad .$$

explizit nach.

(b) **Zusatzaufgabe** **(8 Zusatzpunkte)**

Wiederholen Sie (a) für ein Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ und dem Vektorfeld

$$\underline{A} = \left(x^2 - x^1\right)\underline{e}_1 - x^2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 \quad .$$