Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

10. Übungsblatt

Abgabe: Di, 26.01.2021 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

44. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
Beschreiben Sie in kurzen Worten.

(a) Betrachten Sie ein System, das im ungestörten Zustand die nicht entarteten Eigenzustände $\{|n\rangle\}$ mit Eigenenergien ϵ_n besitzt.
Geben Sie die allgemeine Formel für die Energiekorrektur in zweiter Ordnung an, wenn das System einer zeitunabhängigen Störung W ausgesetzt wird.

(b) Was ist das Wechselwirkungsbild?

(c) Was besagt Fermis Goldene Regel?

45. **Störungstheorie I: 3-Niveau-System (8 Punkte)**

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit drei Energieniveaus. Der (ungestörte) Hamilton-Operator dieses Systems kann durch eine 3×3 Matrix H_0 beschrieben werden:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Welche Energieeigenwerte und Eigenzustände besitzt H_0?

Betrachten Sie nun eine Störung W des Systems, die durch

$$W = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte des gestörten Hamiltonoperators $H = H_0 + W$ mit Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung in λ.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von H und berechnen Sie dessen Nullstellen.

(d) Zeigen Sie, dass Ihre mit Hilfe der Störungstheorie berechneten Energieeigenwerte aus (b) bis zur Ordnung λ^2 mit den exakt berechneten Energieeigenwerten aus (c) übereinstimmen.

Bitte wenden! →

Δ 46. **Störungstheorie II: Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld (10 Punkte)**

Auf einen harmonischen Oszillator (z.B. ein Ion der Ladung q) wirke ein schwaches, konstantes elektrisches Feld E parallel zur Bewegungsrichtung. Somit lautet der Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - qEx \tag{3}$$

mit $m, \omega, q > 0$.
Betrachten Sie im Folgenden den Term $W(x) = -qEx$ als Störung zum harmonischen Oszillator.

(a) Bestimmen Sie die Korrekturen der Eigenzustände zum ungestörten harmonischen Oszillator bis zur ersten Ordnung im elektrischen Feld E.
Nutzen Sie dazu die Besetzungszahldarstellung des harmonischen Oszillators.

(b) Berechnen Sie die Energiekorrekturen zum ungestörten harmonischen Oszillator bis zur zweiten Ordnung im elektrischen Feld E.

(c) Bestimmen Sie die exakten Energieeigenwerte nun ohne Störungsrechnung, indem Sie eine geeignete quadratische Ergänzung in H einfügen.
Verschwindet die Energiekorrektur dritter Ordnung in E?

47. **Störungstheorie III: Zeitabhängige Kraft (9 Punkte)**

Auf den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{4}$$

wirke eine zeitabhängige Kraft

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ F_0 \mathrm{e}^{-t/T} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

mit $T > 0$.
Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator in seinem Grundzustand $|0\rangle$.

(a) Wie lautet das zeitabhängige Potential $W(t)$, das diese Kraft erzeugt?

(b) Berechnen Sie mit zeitabhängiger Störungstheorie in erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit $P^1_{0\to 1}(t)$, das System zur Zeit $t > 0$ in seinem ersten angeregten Zustand $|1\rangle$ zu finden.

(c) Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis $P^1_{0\to 1}(t)$ für große Zeiten $t \gg T$ unabhängig von t wird. Begründen Sie, warum dies zu erwarten ist.

(d) Können in erster Ordnung auch höhrere angeregte Zustände auftreten?
Diskutieren Sie allgemeiner, welche Ordnung Störungstheorie betrachtet werden muss, um den Zustand $|n\rangle$ aus dem Grundzustand anregen zu können.