INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.



11. Übungsblatt Abgabe: 26. Januar 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

**Fragen zu den Aufgaben:** Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

## 32. Differentialoperatoren III: Rotation (6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit der Rotation geübt werden. $\underline{r}$ sei der bekannte Ortsvektor aus der Vorlesung und $r = |\underline{r}|$ dessen Betrag. Berechnen Sie jeweils die Rotation folgender Vektorfelder:

(a) $\underline{A}(x^1, x^2, x^3) = \underline{r}$

(b) $\underline{B}(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{r^2}\underline{\Omega} \times \underline{r} \quad \text{mit } \underline{\Omega} = \underline{e}_1$

(c) $\underline{C}(x^1, x^2, x^3) = \left[x^2x^3 - \sin(x^1 - x^2)\right] \underline{e}_1 + \left[x^1x^3 + \sin(x^1 - x^2) + \cos((x^3)^2 + x^2)\right] \underline{e}_2 + \left[x^1x^2 + 2x^3\cos((x^3)^2 + x^2)\right] \underline{e}_3$

und skizzieren Sie $\underline{A}$ und $\underline{B}$ jeweils in einer geeigneten Ebene.

## 33. Mehrfache Differentialoperatoren (8 Punkte)

(a) Es seien $\phi(x^1, x^2, x^3)$ eine skalare Funktion, $\underline{A}(x^1, x^2, x^3)$ ein Vektorfeld und $\Delta = \partial_{\underline{r}}^2$ der Laplaceoperator: Zeigen Sie:

i. $\partial_{\underline{r}} \cdot \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right) = 0$

ii. $\partial_{\underline{r}} \times \left(\partial_{\underline{r}}\phi\right) = 0$

iii. $\partial_{\underline{r}} \times \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right) = \partial_{\underline{r}}\left(\partial_{\underline{r}} \cdot \underline{A}\right) - \Delta\underline{A}$

(b) Berechnen Sie zudem $\Delta(\ln r)$ für den Betrag des Ortsvektors $r = |\underline{r}|$.

## 34. Summenkonvention und Levi-Civita-Symbol (6 Punkte)

Das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{abc}$ und das Kronecker-Symbol $\delta_{ab}$ stehen in engem Zusammenhang. Es gilt die Summenkonvention.

(a) Beweisen Sie die Relation

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{abc} = 6 \tag{1}$$

durch die Ausführung der Dreifachsumme.

(b) Beweisen Sie die Relation

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{abd} = 2\delta_{cd} \tag{2}$$

durch die Ausführung der Doppelsumme.

(c) Verifizieren Sie für die Relation

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd} \tag{3}$$

die Eigenschaften

i. $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = -\varepsilon_{acb}\varepsilon_{ade}$

ii. $\varepsilon_{abb}\varepsilon_{ade} = 0$

iii. $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{abd} = 2\delta_{cd}$

iv. $\varepsilon_{a12}\varepsilon_{a21} = -1$

*Hinweis:* Die Relation soll nicht bewiesen werden, sie wird vorrausgesetzt. Zu zeigen ist, dass für i. bis iv. aus den jeweils linken Seiten vermöge dieser Relation die entsprechendend rechten Seiten hervorgehen.