Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

9. Übungsblatt

Abgabe: Di, 19.01.2021 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

40. **Projektionsoperatoren (4 Punkte)**

Gegeben sei ein System mit Hamilton-Operator H und einem bekannten VONS $\{|n\rangle\}$ mit $H|n\rangle = E_n|n\rangle$.
Betrachten Sie den Operator

$$P_m = |m\rangle\langle m| \tag{1}$$

mit $|m\rangle \in \{|n\rangle\}$

(a) Zeigen Sie, dass P_m ein Projektor-Operator ist, dass also

$$(P_m)^2 = P_m \tag{2}$$
$$P_m^\dagger = P_m \tag{3}$$

erfüllt ist.

(b) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von P_m an.

(c) Nehmen Sie an, das System befinde sich in einem Zustand

$$|\mu\rangle = \sum_n \mu_n |n\rangle \tag{4}$$

mit $\langle\mu|\mu\rangle = 1$.
Welche Messergebnisse kann eine Messung mit der Observablen

$$A = P_m^\dagger H P_m \tag{5}$$

ergeben?

Bitte wenden! →

41. **Produktzustände und Verschränkung (8 Punkte)**

Ein Spin-1/2-Teilchen wird (wie bereits in vorigen Aufgaben) anhand seines Spins in z-Richtung beschrieben:

$$S_z\left|\uparrow\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\uparrow\right\rangle \qquad S_z\left|\downarrow\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|\downarrow\right\rangle \tag{6}$$

Gegeben sei nun ein System mit zwei Spin-1/2-Teilchen und Basiszuständen

$$\left|ab\right\rangle = \left|a\right\rangle_A \otimes \left|b\right\rangle_B \ , \tag{7}$$

wobei $a, b \in \{\uparrow, \downarrow\}$ und $\left|\bullet\right\rangle_{A(B)}$ gerade den Spin-Zustand von Teilchen $A(B)$ darstellt.
Weiter können Operatoren O, die Eigenschaften der Spins getrennt auswerten, als

$$O = O_A \otimes O_B \qquad \text{mit} \qquad O\left|ab\right\rangle = \left(O_A\left|a\right\rangle_A\right) \otimes \left(O_B\left|b\right\rangle_B\right) \tag{8}$$

geschrieben werden.
Betrachten Sie den allgemeinen Produktzustand $\left|P\right\rangle$ des Systems

$$\begin{aligned}\left|P\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(a_1\left|\uparrow\right\rangle_A + a_2\left|\downarrow\right\rangle_A\right) \otimes \left(b_1\left|\uparrow\right\rangle_B + b_2\left|\downarrow\right\rangle_B\right) & (9)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(a_1 b_1\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + a_1 b_2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + a_2 b_1\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + a_2 b_2\left|\downarrow\downarrow\right\rangle\right) & (10)\end{aligned}$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_{1,2}, b_{1,2} \in \mathbb{C}$ und einer passenden Normierungskonstante $N \in \mathbb{C}$ und die Operatoren

$$\begin{aligned}S_z^A &= S_z \otimes \mathbb{1} & (11)\\ S_z^B &= \mathbb{1} \otimes S_z & (12)\\ S_z^{\text{ges}} &= S_z^A + S_z^B & (13)\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$\left\langle P\middle|S_z^A\middle|P\right\rangle, \quad \left\langle P\middle|S_z^B\middle|P\right\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle P\middle|S_z^{\text{ges}}\middle|P\right\rangle \ . \tag{14}$$

(b) Betrachten Sie nun den aus der Vorlesung bekannten Singulettzustand[1]

$$\left|S\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\left|\uparrow\right\rangle_A \otimes \left|\downarrow\right\rangle_B\right) - \left(\left|\downarrow\right\rangle_A \otimes \left|\uparrow\right\rangle_B\right)\right] \tag{15}$$

und berechnen Sie die Erwartungswerte

$$\left\langle S\middle|S_z^A\middle|S\right\rangle, \quad \left\langle S\middle|S_z^B\middle|S\right\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle S\middle|S_z^{\text{ges}}\middle|S\right\rangle \tag{16}$$

auch für diesen Zustand.

(c) Geben Sie Bedingungen für die Koeffizienten $a_{1,2}, b_{1,2}$ an, sodass die Erwartungswerte (des Produktzustandes) aus Glg. (14) mit denen (des Singulettzustandes) aus Glg. (16) übereinstimmen.

(d) Können Sie Ihre Bedingungen für die Koeffizienten des Produktzustandes aus Aufgabenteil (c) so ergänzen, dass auch der Erwartungswert $\left\langle n\middle|S_z^A S_z^B\middle|n\right\rangle$ für beide Zustände $\left|n\right\rangle = \left|S\right\rangle, \left|P\right\rangle$ übereinstimmt?
Interpretieren Sie das Ergebnis.

(e) Zeigen Sie, dass für den Produktzustand $\left|P\right\rangle$ gilt

$$\left\langle P\middle|S_z^A S_z^B\middle|P\right\rangle = \left\langle P\middle|S_z^A\middle|P\right\rangle \cdot \left\langle P\middle|S_z^B\middle|P\right\rangle \ . \tag{17}$$

Bitte wenden! →

[1] Die englische Bezeichnung „Singlet“ ist ebenfalls gebräuchlich.

Δ 42. **Clebsch-Gordan-Koeffizienten I (10 Punkte)**

Betrachten Sie Kopplung zweier Drehimpulse $j_1 = \frac{3}{2}$, $j_2 = 1$ zu einem Gesamtdrehimpuls $j = \frac{3}{2}$.
Bestimmen Sie alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\left\langle j_1{=}\frac{3}{2},\, j_2{=}1,\, m_1,\, m_2 \middle| j_1{=}\frac{3}{2},\, j_2{=}1,\, j{=}\frac{3}{2},\, m \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}\ ,\ 1\ ,\ m_1\ ,\ m_2 \middle| \frac{3}{2}\ ,\ m \right\rangle \tag{18}$$

mit $m_1 = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ und $m_2 = 0, \pm 1$ sowie $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.
Benutzen Sie dazu das aus der Vorlesung bekannte Schema.

43. **Clebsch-Gordan-Koeffizienten II (8 Punkte)**

Werden nicht alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten benötigt, so muss man nicht nach dem Schema aus der Vorlesung verfahren, sondern kann explizit Leiter-Operatoren anwenden.

Betrachten Sie zwei gekoppelte Drehimpulse $j_1 = \frac{3}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$. Drücken Sie die normierten Zustände

$$\left| j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{1}{2}, j = 2, m = 2 \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1 \right\rangle, \quad \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1 \right\rangle \tag{19}$$

durch die Zustände

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 \right\rangle \tag{20}$$

aus.

Berechnen Sie also folgende Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\left\langle \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2} \middle| 2\ ,\ 2 \right\rangle, \tag{21}$$

$$\left\langle \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2} \middle| 2\ ,\ 1 \right\rangle, \tag{22}$$

$$\left\langle \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2} \middle| 2\ ,\ 1 \right\rangle, \tag{23}$$

$$\left\langle \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2} \middle| 1\ ,\ 1 \right\rangle, \tag{24}$$

$$\left\langle \frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2} \middle| 1\ ,\ 1 \right\rangle. \tag{25}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

i. Es ist unmittelbar klar, dass $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 2\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\right\rangle$ (warum?).

ii. Konstruieren Sie die Zustände $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m\right\rangle$ durch Anwendung von J_-. Zur Erinnerung:

$$J_- \left| j, m \right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, \left| j, m-1 \right\rangle \tag{26}$$

iii. Wählen Sie den Zustand $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1\right\rangle$ so, dass er orthonormal zu $\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1\right\rangle$ ist.