10. Übungsblatt — Abgabe: 19. Januar 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

28. Differentiation von skalar- und vektorwertigen Funktionen (7 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgenden Differentiationsregeln für vektorwertige Funktionen $\underline{A}(t)$, $\underline{B}(t)$:

(i.) $\mathrm{d}_t\left[\underline{A}\cdot\underline{B}\right] = (\mathrm{d}_t\underline{A})\cdot\underline{B} + \underline{A}\cdot\mathrm{d}_t\underline{B}$

(ii.) $\mathrm{d}_t\left[\underline{A}\times\underline{B}\right] = (\mathrm{d}_t\underline{A})\times\underline{B} + \underline{A}\times\mathrm{d}_t\underline{B}$

(iii.) $\underline{A}\cdot\mathrm{d}_t\underline{A} = \left|\underline{A}\right|\mathrm{d}_t\left|\underline{A}\right|$

(b) Es seien $\phi(x,y,z)$ und $\psi(x,y,z)$ skalare Funktionen und $\underline{C}(x,y,z)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie folgende Differentiationsregeln:

(i.) $\partial_{\underline{r}}\left(\phi\,\psi\right) = \left(\partial_{\underline{r}}\phi\right)\psi + \phi\left(\partial_{\underline{r}}\psi\right)$

(ii.) $\partial_{\underline{r}}\left(\phi\,\underline{C}\right) = \phi\,\partial_{\underline{r}}\underline{C} + \left(\partial_{\underline{r}}\phi\right)\cdot\underline{C}$

(iii.) $\partial_{\underline{r}}\left(\phi^n\right) = n\,\phi^{n-1}\partial_{\underline{r}}\phi$

(c) Wir betrachten ein Teilchen, das sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ bewegt. Der Betrag der Geschwindigkeit soll konstant sein, also

$$v \equiv \left|\underline{v}\right| = \text{const.}$$

Zeigen Sie, dass dann die Beschleunigung $\underline{a} = \mathrm{d}_t\underline{v}$ senkrecht auf $\underline{v}$ steht.

29. Differentialoperatoren I: Gradient (7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit dem Gradienten geübt werden. $\underline{r}$ sei der bekannte Ortsvektor aus der Vorlesung und $r = |\underline{r}|$ dessen Betrag.

(a) Berechnen Sie jeweils den Gradienten folgender skalarer Funktionen:

i. $\phi(x,y,z) = r$

ii. $\psi(x,y,z) = \frac{1}{r}$

iii. $\chi(x,y,z) = 8x^2y^3 - 4xyz^2$

(b) Ein weiterer Ortsvektor sei gegeben durch $\tilde{\underline{r}}$. Beweisen Sie: $\partial_{\underline{r}}|\underline{r} - \tilde{\underline{r}}| = -\partial_{\tilde{\underline{r}}}|\underline{r} - \tilde{\underline{r}}|$.

Bitte wenden ⟶

30. **Differentialoperatoren II: Divergenz** **(6 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit der Divergenz geübt werden. $\underline{r}$ sei der bekannte Ortsvektor aus der Vorlesung und $r = |\underline{r}|$ dessen Betrag. Berechnen Sie jeweils die Divergenz der folgenden Vektorfelder:

(a) $\underline{A}(x, y, z) = \underline{r}$

(b) $\underline{B}(x, y, z) = \frac{\underline{r}}{r^3}$

(c) $\underline{C}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + z \\ 4x^2 + y \\ xz + yz + z^2 \end{pmatrix}$

31. **Bonusaufgabe: Lineare Differentialoperatoren** **(3 Bonuspunkte)**

Beweisen Sie ausgehend von Ihren Kenntnissen aus der "Linearen Algebra", dass der Gradient und die Divergenz lineare Abbildungen (lineare Operatoren) sind. Vorausgesetzt werden die Regeln für die partielle Ableitung.