Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

RECHENMETHODEN I — WS 2020/21

9. Übungsblatt — Abgabe: 12. Januar 2021 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

25. Volumen einer Kugelschale (5 Punkte)

Gegeben sei eine Kugelschale mit Dicke $d = R_2 - R_1$ ($R_1 < R_2$). R_1 und R_2 sind dabei die Radien der Sphären, die die Kugelschale nach innen bzw. außen begrenzen. Bestimmen Sie das Volumen der Kugelschale auf direktem Weg mithilfe eines Volumenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie zudem das Volumen als Differenz der Volumina zweier Kugeln mit Radius R_1 bzw. R_2 mithilfe der bekannten Volumenformel berechnen.

26. Kugel mit inhomogener Massendichte (5 Punkte)

Wir betrachten eine Kugel $\mathcal{K}$ um den Ursprung mit Radius R, deren Massendichte von dem Polarwinkel (Poldistanz) θ abhängig ist und durch

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha \cos\theta + \beta \cos^2\theta\right)$$

gegeben ist. Mit ρ_0, α, β werden Konstanten bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Kugel.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten (x_S, y_S, z_S) des Schwerpunkts S der Kugel. Diese sind durch

$$x_S = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} x\rho \,\mathrm{d}V \quad ; \quad y_S = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} y\rho \,\mathrm{d}V \quad ; \quad z_S = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{K}} z\rho \,\mathrm{d}V$$

definiert.

Bitte wenden ⟶

27. **Trägheitsmomente eines Ellipsoids** **(10 Punkte)**

Durch die Menge

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}$$

wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Dieses Ellipsoid besitzt zudem eine konstante Massendichte ρ_0.

(a) Parametrisieren Sie das Ellipsoid in Analogie zur Parametrisierung der Ellipse aus Aufgabe 21 und zeigen Sie, dass die Jacobi-Determinante durch

$$J = a\,b\,c\,s^2 \sin(\theta)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet s den relativen Radius und θ die Poldistanz.

(b) Berechnen Sie die Gesamtmasse des Ellipsoids.

(c) Bestimmen Sie die *Hauptträgheitsmomente* des Ellipsoids. Diese sind durch

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \left(y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}V \quad ; \\ \Theta_{22} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \left(x^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}V \quad ; \\ \Theta_{33} &= \rho_0 \int_{\mathcal{E}} \left(x^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}V \end{aligned}$$

definiert.

(d) Zeigen Sie, dass das Integral zur Berechnung der Oberfläche des Ellipsoids durch

$$O = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \sqrt{\left(b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi\right) c^2 \sin^2\theta + a^2 b^2 \cos^2\theta} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

gegeben ist, wobei φ den Azimuthwinkel bezeichnet.

(e) **Bonusaufgabe** **(4 Zusatzpunkte)**
Berechnen Sie die Oberfläche eines Ellipsoids mit $a = b$ und $a > c$.
Zeigen Sie dazu mit Hilfe einer geeigneten Substitution und unter Ausnutzung von Aufgabe 3 des 0. Übungsblattes: $\int \sqrt{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arsinh}(x) \right] + \text{const.}$