Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

7. Übungsblatt

Abgabe: Di, 15.12.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

30. **Wissensfragen (2 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
Beschreiben Sie in kurzen Worten.

(a) Geben Sie die Kommutatoren $\left[\hat{r}_i, \hat{r}_j\right]$, $\left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right]$ und $\left[\hat{r}_i, \hat{p}_j\right]$ an.

(b) Was sind Glauber-Zustände? Wozu werden diese benutzt?

31. **Glauberzustände (7 Punkte)**

Sei

$$|c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} \mathrm{e}^{-|c|^2/2} |n\rangle \tag{1}$$

der zu $c \in \mathbb{C}$ gehörende Glauber-Zustand.

(a) In der Vorlesung wurden $\langle c|a|c\rangle$ und $\left\langle c\middle|a^\dagger\middle|c\right\rangle$ berechnet. Bestimmen Sie weiterhin

i. $\left\langle c\middle|a^\dagger a\middle|c\right\rangle$

ii. $\left\langle c\middle|a a^\dagger\middle|c\right\rangle$

iii. $\left\langle c\middle|a^\dagger a a^\dagger a\middle|c\right\rangle$.

(b) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (a) und berechnen Sie den Erwartungswert des Ortsoperators im Glauberzustand $\langle c|\hat{r}|c\rangle$ und die relative Schwankung der Quantenanzahl $\frac{\Delta N}{\langle N\rangle} = \frac{\sqrt{\langle (N-\langle N\rangle)^2\rangle}}{\langle N\rangle}$.

Bestimmen Sie außerdem das Schwankungsquadrat des Ortsoperators $\left\langle c\middle|\hat{r}^2\middle|c\right\rangle - \langle c|\hat{r}|c\rangle^2$.

(c) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit makroskopischen Ausmaßen:
$m = 1000$ g, $\omega = \frac{1}{s}$.

Berechnen Sie bei einer Auslenkung von 1 cm den Erwartungswert der Quantenanzahl und dessen relative Schwankung sowie das Schwankungsquadrat des Ortsoperators.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, insbesondere im Hinblick auf den klassischen Grenzfall $\hbar \to 0$.

Bitte wenden! →

32. **Harmonischer Oszillator (13 Punkte)**

Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \hat{r}^2 \, . \tag{2}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie das Spektrum mittels der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \, \hat{r} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \, \hat{p} \, , \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \, \hat{r} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \, \hat{p} \tag{3}$$

bestimmt werden kann. Hier wollen wir eine Ortsdarstellung der Eigenvektoren $|\, n\rangle$ ($\hat{H} \,|\, n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2) \,|\, n\rangle$) bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Auf- und Absteigeoperatoren in Ortsdarstellung durch

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right) \quad \text{und} \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right) \tag{4}$$

mit $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \, r$ dargestellt werden können.

(b) Interpretieren Sie die Bedingung

$$\hat{a} \,|\, 0\rangle = 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \int \mathrm{d}q' \, \left\langle q \middle| \hat{a} \middle| q' \right\rangle \psi_0(q') = 0 \tag{6}$$

als Differentialgleichung für die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(q) = \langle q \,|\, 0\rangle$ und zeigen Sie, dass diese die Form

$$\psi_0(q) = C_0 \, \mathrm{e}^{-q^2/2} \tag{7}$$

mit der Normierungskonstanten $C_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$ besitzt.

Δ (c) Zeigen Sie durch wiederholte Anwendung von $\hat{a}^\dagger$ auf $\psi_0(q)$, dass $\psi_n(q) \propto \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \psi_0(q)$ die Form

$$\psi_n(q) = C_n \, \mathrm{e}^{-q^2/2} \, H_n(q) \tag{8}$$

hat. Hierbei ist $H_n(q)$ das n-te *Hermite*-Polynom

$$H_n(q) = \mathrm{e}^{q^2/2} \left(q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \right)^n \mathrm{e}^{-q^2/2} \, . \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante C_n mit Hilfe der Relation $\hat{a}^\dagger \,|\, n\rangle = \sqrt{n+1} \,|\, n+1\rangle$.

Δ (d) Leiten Sie aus den Relationen $\hat{a} \,|\, n\rangle = \sqrt{n} \,|\, n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger \,|\, n\rangle = \sqrt{n+1} \,|\, n+1\rangle$ eine Rekursionsrelation für $H_n(q)$ her.
Bestimmen Sie daraus H_n mit $n = 1, 2, 3, 4$.
Wieviele Nullstellen hat $H_n(q)$ (Knotensatz)?
Hinweis: H_0 ist explizit aus der Definition (9) zu bestimmen. H_1 erhält man aus H_0, da hier in der Rekursionsrelation H_{-1} mit Koeffizient 0 auftritt.

Δ (e) Zeigen Sie durch explizite Rechnung für $n, m = 0, 1, 2$, dass die Wellenfunktionen $\psi_n(r)$ tatsächlich orthonormal sind, dass also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}r \; \psi_n^*(r) \psi_m(r) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \; \psi_n^*(q) \psi_m(q) = \delta_{nm} \tag{10}$$

erfüllt ist.

Δ (f) Skizzieren Sie $\frac{\psi_n(q)}{\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}}}$ für $n = 0, 1, 2$ und 3.

Bitte wenden! →

33. **Levi-Civita-Symbol (4 Punkte)**

Das Levi-Civita-Symbol (in drei Dimensionen) ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } ijk \text{ zyklische Permutation von 123} \\ -1 & \text{, falls } ijk \text{ antizyklische Permutation von 123} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{11}$$

Das Levi-Civita-Symbol lässt sich auch durch die Bedingung beschreiben, dass es bei der Vertauschung zweier Indizes das Vorzeichen wechselt (beispielsweise $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$) und außerdem $\epsilon_{123} = 1$ gilt.
Nutzen Sie diese Definitionen des Levi-Civita-Symbols, um die folgenden Eigenschaften nachzurechnen:

(a) $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

(b) $\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$

(c) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

Nutzen Sie diese Eigenschaften, um folgende Identität für das Kreuzprodukt mit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{R}^3$ zu verifizieren:

(d) $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$.

34. **Kommutatorrelationen des Drehimpulsoperators (4 Punkte)**

Mit dem Ortsoperator $\hat{\vec{r}}$ und dem Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$ ist in der Vorlesung der Drehimpulsoperator als $\hat{\vec{J}} = \left(\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right)/\hbar$ definiert worden.

Gleichsam wurden die Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ eingeführt.

Bestimmen Sie die Kommutatoren

(a) $\left[\hat{J}_l, \hat{r}_m\right]$,

(b) $\left[\hat{J}_l, \hat{p}_m\right]$,

(c) $\left[\hat{J}_l, \left(\hat{\vec{r}}\right)^2\right]$,

(d) $\left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right]$.