INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

6. Übungsblatt

Abgabe: Di, 8.12.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

25. **Wissensfragen (3 Punkte)**

    Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
    Beschreiben Sie in kurzen Worten.

    (a) Wie lautet die allgemeine Unschärferelation zwischen zwei Observablen A und B?

    (b) Was versteht man unter dem „Schrödinger-Bild“ und dem „Heisenberg-Bild“?

26. **Rechnungen zur Orts- und Impulsdarstellung (5 Punkte)**

    (a) In der Vorlesung wurde folgende Eigenschaft der Delta-Funktion benutzt:

    $$r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta(r) = -\delta(r) \tag{1}$$

    Zeigen Sie die verallgemeinerte Beziehung

    $$\frac{r^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}r^n}\delta(r) = (-1)^n\delta(r) \tag{2}$$

    indem Sie auf die Darstellung der Delta-Distribution durch Funktionenfolgen aus Aufgabe 11 zurückgreifen.

    (b) Zeigen Sie außerdem folgende Eigenschaft der Delta-Funktion

    $$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}r\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta(r)\right)f(r) = -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f(r)\right|_{r=0} \tag{3}$$

    (c) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für Matrixelemente in Impulsdarstellung:

    i. $\langle p|\hat{p}|p'\rangle = p\,\delta(p-p')$

    ii. $\langle p|\hat{r}|p'\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p')$

    Dabei seien $\hat{p}$ und $\hat{r}$ der Impuls- bzw. Ortsoperator und $|p\rangle$ die Eigenbasis des Impulsoperators.

Bitte wenden! →

27. **Ehrenfest-Theorem: Harmonischer Oszillator (6 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

i. $[\hat{r}, \hat{p}^n]$,

ii. $[\hat{p}, \hat{r}^n]$

mit $\hat{r}$ und $\hat{p}$ dem Orts- bzw. Impulsoperator.

Hinweis: Es gilt wie schon bewiesen $[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C]$.

(b) Betrachten Sie den 1D-Hamiltonoperator

$$\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{r}). \tag{4}$$

Nutzen Sie (a), um

i. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \hat{p} \rangle$ und

ii. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \hat{r} \rangle$

zu bestimmen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Hinweis: Führen Sie eine Taylor-Entwicklung des Potentials durch und verwenden Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichung aus der Vorlesung.

(c) Betrachten Sie nun den harmonischen Oszillator, $\hat{V}(\hat{r}) = \frac{m\omega^2}{2} \hat{r}^2$.
Vergleichen Sie die Trajektorien für den klassischen harmonischen Oszillator mit den Trajektorien von $\langle \hat{r} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$ im QM-Fall.

28. **Translationsoperator (6 Punkte)**

Sei $\hat{T}(\epsilon)$ der Translationsoperator um ϵ, d. h. $\hat{T}(\epsilon)\, |r\rangle = |r + \epsilon\rangle$.

(a) Begründen Sie, dass $\hat{T}(\epsilon)$ der Form

$$\hat{T}(\epsilon) = \mathrm{e}^{-i\hat{\kappa}\epsilon}, \qquad \hat{\kappa}^\dagger = \hat{\kappa} \tag{5}$$

ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Herleitung des Zeitentwicklungsoperators.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa = \frac{1}{\hbar}\hat{p}$ gewählt werden kann, mit dem Impulsoperator $\hat{p}$.

(c) Rechnen Sie umgekehrt explizit nach, dass $\hat{T}(\epsilon) = \mathrm{e}^{-i\hat{p}\epsilon/\hbar}$ der Translationsoperator ist, dass also

$$\hat{T}(\epsilon)\, |r\rangle = |r + \epsilon\rangle \tag{6}$$

gilt.

Bitte wenden! $\rightarrow$

Δ 29. **Ortsdarstellung des harmonischen Oszillators (10 Punkte)**

Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators in der Ortsraumdarstellung ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \hat{r}^2 \, . \tag{7}$$

(a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung zum Hamilton-Operator (7) in die Form

$$\frac{\hbar\omega}{2} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + q^2 \right) \psi_n(q) = E_n \, \psi_n(q) \tag{8}$$

(b) Zur Motivation eines Lösungsansatzes für die DGL in (a) betrachten Sie zunächst folgende alternative DGL:

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + q^2 - 1 \right) f(q) = 0 \tag{9}$$

Zeigen Sie das eine solche DGL von einer Funktion $f(q)$ gelöst wird, die folgende einfachere DGL erfüllt:

$$\left(+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} + q \right) f(q) = 0 \tag{10}$$

Geben Sie eine allgemeine normierbare Lösung an.
Bemerkung: Durch die Lösung dieser DGL erhalten Sie einen Hinweis auf die Asymptotik von $\psi_n(q)$ für große q.

(c) Das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) motiviert folgenden Lösungsansatz:

$$\psi_n(q) = \mathrm{e}^{-q^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \, q^l \tag{11}$$

wobei $\alpha_l \in \mathbb{R}$.
Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung (8) ein und zeigen Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen, dass die α_l folgende Rekursionsrelation erfüllen:

$$(l+2)(l+1) \, \alpha_{l+2} = \left((2l+1) - \frac{2E_n}{\hbar\omega} \right) \alpha_l \tag{12}$$

(d) Begründen Sie, warum aus der Normierbarkeit der Wellenfunktion $\psi_n(q)$ eine Abbruchbedingung $\alpha_l = 0$ für $l > l_0$ folgt.
Leiten Sie aus dieser Abbruchbedingung einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte E_n her.

(e) Lösen Sie die Rekursionsrelation (12) für die α_l mit der Abbruchbedingung aus Aufgabenteil (d) für den Grundzustand $n = 0$.
Geben Sie schließlich die explizite Form der *normierten* Wellenfunktion $\psi_0(r)$ an.