Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

4. Übungsblatt

Abgabe: Di, 24.11.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

17. **Wissensfragen (3 Punkte)**

    Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
    Beschreiben Sie in kurzen Worten.

    (a) Beschreiben Sie das Phänomen der Resonanzen an einem endlichen Potentialtopf.

    (b) Was ist ein Hilbertraum?

18. **Schwarzsche Ungleichung (4 Punkte)**

    Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $|a\rangle \in \mathcal{H}$ und $|b\rangle \in \mathcal{H}$ zwei Vektoren und $\langle a|b\rangle$ das Skalarprodukt.
    Weiter sei $||\,|a\rangle\,|| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.
    Zeigen Sie, dass dann die Schwarzsche Ungleichung

    $$||\,|a\rangle\,|| \cdot ||\,|b\rangle\,|| \geq |\langle a|b\rangle| \tag{1}$$

    gilt.

19. **Kommutatoren (4 Punkte)**

    Mit Hilfe des Produkts AB zweier Operatoren A und B in einem Hilbertraum definiert man den Kommutator

    $$[A, B] := AB - BA \tag{2}$$

    (a) Zeigen Sie, dass für drei Operatoren A, B und C folgenden Identitäten gelten

    i.
    $$[A, BC] = B\,[A, C] + [A, B]\,C \tag{3}$$

    ii.
    $$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \tag{4}$$

    (b) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Identität

    $$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{5}$$

    gilt.

Bitte wenden! →

20. **Dualer Raum und Hilbertscher Folgenraum (9 Punkte)**

(a) Zu einer Basis $|n\rangle$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ definieren wir die duale Basis $\langle m|$ so, dass bezüglich des Skalarprodukts $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gilt:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n} \tag{6}$$

Wir betrachten nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ und die Basis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |3\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Geben Sie hierzu die duale Basis $\langle 1|$, $\langle 2|$, $\langle 3|$ an, so dass (6) für das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ erfüllt ist.

(b) Ein spezieller Hilbertraum ist der *Hilbert*sche Folgenraum ℓ^2. Dieser ist definiert als die Menge aller Folgen a_n, $n \geq 1$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ endlich ist:

$$\ell^2 = \left\{ |\{a_n\}\rangle = |a_1, a_2, \ldots\rangle \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \tag{8}$$

i. Welche der folgenden Ausdrücke sind Elemente des ℓ^2?

$$|\{\alpha_n\}\rangle = |1, 1, \ldots\rangle, \quad \alpha_n = 1; \qquad |\{\beta_n\}\rangle = |3, 2, 1, 0, \ldots\rangle, \quad \beta_n = 0 \text{ für } n > 3;$$
$$|\{\gamma_n\}\rangle = |1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\rangle, \quad \gamma_n = \tfrac{1}{n}; \qquad |\{\delta_n\}\rangle = |1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \ldots\rangle, \quad \delta_n = \tfrac{1}{\sqrt{n}}.$$

ii. Sei das Skalarprodukt auf ℓ^2 gegeben durch

$$\langle\{a_n\}|\{b_n\}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n \, . \tag{9}$$

Eine Basis von ℓ^2 lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |1, 0, \ldots\rangle \\ |2\rangle &= |1, 1, 0, \ldots\rangle \\ |3\rangle &= |1, 1, 1, 0, \ldots\rangle \\ &\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

d.h. $|k\rangle$ ist gegeben durch die Folge $a_n = 1$ für $n \leq k$ und $a_n = 0$ für $n > k$.
Geben Sie hierzu die duale Basis $\langle k'|$ an, so dass für das Skalarprodukt Glg. (6) erfüllt ist.

Geben Sie für diejenigen Ausdrücke $|\mu\rangle$ aus (i.), welche Element von ℓ^2 sind, die Darstellung in der Basis $|k\rangle$ an. Bestimmen Sie also Koeffizienten μ_k so, dass $|\mu\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \, |k\rangle$ gilt.

Bitte wenden! $\rightarrow$

Δ 21. **Skalarprodukt und Impulsoperator auf $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ (10 Punkte)**

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, so dass sowohl f als auch f' quadratintegrabel sind. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f^*(x)g(x) \tag{11}$$

(a) Betrachten Sie den Operator $P : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{H}$ mit

$$Pf = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \tag{12}$$

für $f \in \mathcal{D}_0$ und

$$\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{H}|f(0) = f(2\pi) = 0\} \tag{13}$$

Bestimmen Sie eine Formel für $P^\dagger : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Defintionsbereich $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ für $P^\dagger$.

(b) Erweitern Sie nun den Definitionsbereich von P auf

$$\mathcal{D}'_\alpha = \{f \in \mathcal{H}|f(2\pi) = \mathrm{e}^{i\alpha}f(0)\} \supset \mathcal{D}_0 \tag{14}$$

Nehmen Sie an, dass die Form des adjungierten Operators $P^\dagger$ identisch zum vorherigen Aufgabenteil bleibt.
Zeigen Sie nun, dass in diesem Fall auch $P^\dagger$ den Definitionsbereich $\mathcal{D}'_\alpha$ besitzt. Der Operator P ist damit ein selbstadjungierter Operator.

(c) Betrachten Sie nun den Hamiltonoperator eines freien Teilchens

$$H = \frac{P^2}{2m} \tag{15}$$

auf $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}'_\alpha$.
Bestimmen Sie jeweils das Eigenwertspektrum von H.
Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welche Funktionen $f \in \mathcal{H}$ Elemente von $\mathcal{D}_0$ bzw. $\mathcal{D}'_\alpha$ sind. Überlegen Sie sich dann, welche dieser Funktionen das Eigenwertproblem $Hf = Ef$ lösen. Alle erlaubten Eigenwerte $E \in \mathbb{R}$ bilden dann das Eigenwertspektrum von H.