Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

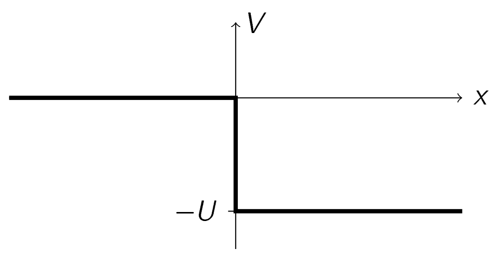
3. Übungsblatt

Abgabe: Di, 17.11.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

13. **Reflexion an einer Potentialstufe (5 Punkte)**

Wir betrachten die folgende eindimensionale Potentialstufe



d.h.

$$V(x) = \begin{cases} -U & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $-U < E < 0$ mit folgendem Ansatz

$$\Psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & , \ x > 0 \\ C e^{qx} & , \ x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

mit Koeffizienten q und k, sowie Amplituden A, B und C.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten q und k.

(b) Geben Sie den Reflexionskoeffizienten

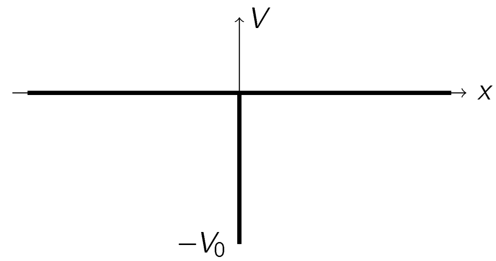
$$R(E) = \frac{A}{B} \tag{3}$$

an, indem Sie die Anschlussbedingungen an der Potentialstufe ausnutzen.

(c) Skizzieren Sie das Betragsquadrat des Reflexionskoeffizienten $|R(E)|^2$ abhängig von E/U.

Bitte wenden! →

14. δ-**Potential (7 Punkte)**



Wir betrachten die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\,\psi(x) \tag{4}$$

für ein attraktives δ-Potential ($V_0 > 0$)

$$V(x) = -V_0\,\delta(x)\,. \tag{5}$$

In diesem Fall ist die Wellenfunktion $\psi(x)$ zwar stetig bei $x = 0$, die Ableitung $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ springt dort aber aufgrund des δ-förmigen Potentials.

(a) Berechnen Sie die Höhe des Sprungs in der Ableitung der Wellenfunktion

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(\epsilon) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(-\epsilon)\right)\,,$$

indem Sie die Schrödinger-Gleichung (4) in einem kleinen Bereich um $x = 0$ integrieren.

(b) Betrachten Sie den Fall $E < 0$ und diskutieren Sie, wieviele gebundene Lösungen Sie erhalten.
Berechnen Sie die Energie des Grundzustandes und skizzieren Sie die normierte Grundzustandswellenfunktion.

Bitte wenden! $\rightarrow$

∆ 15. **Kronig-Penney-Modell (10 Punkte)**

Ein einfaches Modell für Energiebänder in Festkörpern ist das *Kronig-Penney*-Modell. Es handelt sich hierbei um ein eindimensionales Modell mit folgendem Potential:

$$V(x) = V_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - na) \,. \tag{6}$$

(Man stelle sich darunter eine eindimensionale periodische Anordnung von Atomen im Abstand a vor, die durch unendlich hohe aber unendlich dünne Barrieren der Stärke $V_0 > 0$ voneinander getrennt sind).

(a) Geben Sie allgemeine Lösungen Ψ_n mit Energie $E > 0$ für die Schrödingergleichung in den Bereichen

$$X_n = \{x \mid na < x < (n+1)a\} \,. \tag{7}$$

an.

(b) Bestimmen Sie die Anschlussbedingungen für die Lösungen bei $x = na$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Aufgrund der Periodizität des Potentials $V(x + a) = V(x)$ kann die Lösung als *Bloch*-Welle angesetzt werden, d.h.

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{iKx} u_K(x) \tag{8}$$

mit periodischem u_K: $u_K(x + a) = u_K(x)$ und dem sogenannten Kristallimpuls K.

i. Benutzen Sie den Ansatz der Bloch-Welle, um eine Beziehung zwischen die Koeffizienten der Ψ_n ($n \neq 0$) aus (a) durch die Koeffizienten der Wellenfunktion Ψ_0 auszudrücken.

ii. Nutzen Sie dann ihre Anschlussbedingungen aus (b), um eine Bestimmungsgleichung für die Energie E in Abhängigkeit vom Kristallimpuls K zu erhalten.
Hinweis: Durch die Periodizität der Bloch-Welle genügt es, die Anschlussbedingungen an einem δ-Potential zu berechnen (z.B für $x = a$). Die Bedingungen werden dann automatisch für alle $x = na$ erfüllt.
Hinweis: Wenn Sie die Anschlussbedingungen als Gleichungssystem der Form $\underline{\underline{M}}(A_0\ B_0)^T = (0\ 0)^T$ mit einer Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{M}}$ aufstellen, besitzt dieses genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $\det \underline{\underline{M}} = 0$.

(d) Zeigen Sie mit ihrem Ergebnis aus (c), dass für $V_0 > 0$ nicht alle Energien $E > 0$ eine Lösung besitzen.
Zeigen Sie, dass die oberen Kanten der Energiebänder durch

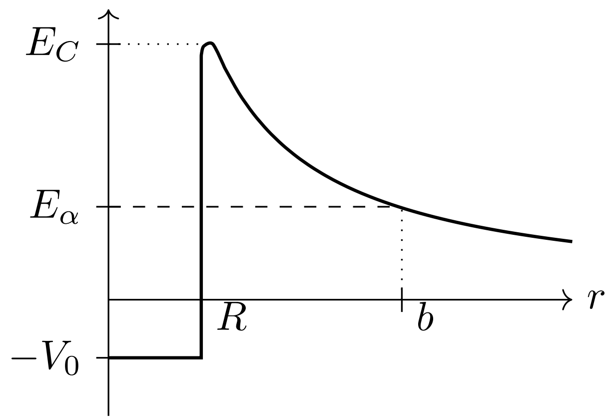
$$E_{n'} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n'^2 \tag{9}$$

gegeben sind.
Skizzieren Sie die untersten 3 Energieniveaus als Funktion von Ka für $amV_0/\hbar^2 = 5$.

16. α-**Zerfall (8 Punkte)**

Eine bekannte Anwendung der quantenmechanischen Beschreibung des Tunneleffekts ist der α-Zerfall. Dabei sendet ein Atomkern ein α-Teilchen aus und zerfällt so in einen anderen Atomkern.

Dies sei hier modelliert als eindimensionales Problem eines α-Teilchens in folgendem Potential:



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ \frac{Z\alpha e^2}{r} & r > R \end{cases} \tag{10}$$

Das α-Teilchen mit Energie $E_\alpha < E_C$ ist im Kernpotential, genähert als Potentialtopf, gebunden, kann dieses aber mithilfe des Tunneleffekts verlassen. Dabei muss es die an den Kern mit Radius R anschließende Barriere überwinden, die als Coulomb-artig angenommen werden soll.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegen n_0 zum α-Zerfall fähige Atome derselben Sorte vor. Innerhalb des Kerns bewegt sich ein α-Teilchen mit der Geschwindigkeit v.

(a) Leiten Sie das Zerfallsgesetz $n = n_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ her und bestimmen Sie die Zerfallskonstante λ.

Hinweis: Die Transmissionswahrscheinlichkeit $|S|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein α-Teilchen von links kommend bei $r = b$ erscheint.

(b) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Näherung $|S(E)|^2 = \mathrm{e}^{-2W/\hbar}$, um die Transmissionswahrscheinlichkeit zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, die Barriere ende bei $b = \frac{Z\alpha e^2}{E_\alpha}$.

Hinweis: $\displaystyle\int \mathrm{d}r \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} = r\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} - \sqrt{b}\arctan\left(\sqrt{b}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}\right).$

(c) Betrachten Sie den Fall $R \ll b \Leftrightarrow E_\alpha \ll E_C$. Geben Sie den Logarithmus der Halbwertszeit $T_{1/2}$ als Funktion von E_α an.

(d) Bringen Sie Ihr Ergebnis in die Form

$$\ln\left(T_{1/2}\right) = AZE_\alpha^{-1/2} - BZ^{2/3} - C. \tag{11}$$

mit Konstanten A, B und C. Nutzen Sie dazu den Zusammenhang $R = 8.4 \cdot 10^{-13}\, Z^{1/3}\,\mathrm{cm}$. Bestimmen Sie die Halbwertszeiten von Uran-238 und Radium-222.