INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

RECHENMETHODEN I — WS 2020/21

4. Übungsblatt — Abgabe: 17. November 2020 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

10. Extrema mit Nebenbedingungen: Gerade und Ellipse (6 Punkte)

Wir betrachten die Gerade

$$y = x + 4$$

und die Ellipse gegeben durch

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad .$$

Diese beiden Objekte haben keinen Schnittpunkt. Finden Sie das Punktepaar (a, b) auf der Geraden und (c, d) auf der Ellipse, die den kürzesten Abstand zueinander haben. Nutzen Sie hierzu die Lagrange-Methode.

Hinweis: Es empfiehlt sich, als zu minimierende Funktion das Abstandsquadrat zu verwenden.

11. Unbestimmte Integrale (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden unbestimmten Integrale mithilfe von

(a) partieller Integration:

i. $\int x^3 \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

ii. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

iii. $\int e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

iv. $\int \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(b) Substitution:

i. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,;\ -|a| < x < |a|$

ii. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x\,;\ -|x| < a < |x|$

iii. $\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

iv. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x$

12. Bestimmte Integrale (6 Punkte)

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale ohne Taschenrechner o.ä. zu verwenden:

(a) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{3} x e^{-x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-2}^{4} |x|\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{-a}^{a} x^4 \sin(x)\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$

Bitte wenden ⟶

13. **Integrale trigonometrischer Funktionen (Bonusaufgabe)** **(6 Zusatzpunkte)**

Die Integrale von Produkten der trigonometrischen Funktionen $\sin(k\,x)$ und $\cos(k\,x)$ mit $k \in \mathbb{N}^+$ (ohne $k = 0$) erfüllen die Eigenschaften:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(m\,x)\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\,x)\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(m\,x)\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad .$$

Beweisen Sie diese Beziehungen.

Hinweis: Der Beweis ist in zwei Varianten möglich:

(a) Unter Benutzung der folgenden Additionstheoreme für sin und cos:

$$\sin(mx)\sin(nx) = 1/2\ (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x))$$
$$\cos(mx)\cos(nx) = 1/2\ (\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x))$$
$$\sin(mx)\cos(nx) = 1/2\ (\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x))$$

(b) Eine elegante Lösungsvariante benutzt die wiederholte partielle Integration. Integrieren Sie zunächst partiell. Das erhaltene Ergebnis integrieren Sie geschickt erneut partiell, so dass Sie das jeweilige Ausgangsintegral reproduzieren. Auflösung nach dem Ausgangsintegral liefert das gewünschte Ergebnis.

Für die vollständige Lösung der Aufgabe genügt eine der beiden Varianten.