INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

2. Übungsblatt

Abgabe: Di, 10.11.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

9. **Wissensfragen (3 Punkte)**

   Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
   Beschreiben Sie in kurzen Worten.

   (a) Welche Kontinuitätsgleichung erfüllt eine Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$, die die Schrödingergleichung löst?

   (b) Geben Sie die Anschlussbedingungen einer Wellenfunktion an einer Potentialstufe an.

   (c) Was versteht man unter der Exponentialfunktion $\exp(\hat{A})$ eines Operators $\hat{A}$?

10. **Halboffener Potentialtopf (7 Punkte)**

    Befinde sich ein Teilchen in einem halbseitig unendlichen Potentialtopf mit folgendem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \qquad \text{(I)} \\ 0 & \text{für} \quad 0 < x < d \qquad \text{(II)} \\ U & \text{für} \quad x > d \qquad \text{(III)} \end{cases} \tag{1}$$

    mit konstantem $U > 0$ und $d > 0$.

    (a) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$ und kennzeichnen Sie die Bereiche (I) bis (III).

    (b) Begründen Sie, warum die Wellenfunktion für einen Zustand mit Energie $0 < E < U$ in den verschiedenen Bereichen durch folgende allgemeine Form mit konstanten $q, k \geq 0$ und konstanten Koeffizienten A, B, C, D gegeben sind:

$$\Psi_{\text{I}}(x) = 0 \tag{2}$$
$$\Psi_{\text{II}}(x) = A\,\mathrm{e}^{-ikx} + B\,\mathrm{e}^{ikx} \tag{3}$$
$$\Psi_{\text{III}}(x) = C\,\mathrm{e}^{-qx} + D\,\mathrm{e}^{qx} \tag{4}$$

    Bestimmen Sie q und k als Funktion der Energie E.
    Warum muss außerdem der Koeffizient D verschwinden?

    (c) Benutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen für $\Psi(x)$ und $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}$, um die Amplituden A, B und C zu bestimmen. Sie müssen die Wellenfunktion nicht normieren.
    Geben Sie eine Bestimmungsgleichung für die möglichen Energien E an.
    Geben Sie das minimale Potential U_{min} an, ab dem es Lösungen mit Energie $0 < E < U$ gibt.

Bitte wenden! →

Δ 11. Dirac'sche Delta- und Heaviside'sche Theta-Funktionen: Distributionen (10 Punkte)

Bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ den Raum der rasch abfallenden Funktionen:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}x^\beta} \varphi(x) \right| < \infty, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0 \right\}. \tag{5}$$

Eine Distribution ist ein stetiges lineares Funktional auf diesem Raum, also eine Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$.

In der Physik besonders wichtig ist u.a. die Delta-Distribution, die für $b \in \mathbb{R}$ definiert ist als

$$\delta_b : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; \quad \varphi \mapsto \delta_b[\varphi] \equiv \delta_b(\varphi) := \varphi(b). \tag{6}$$

δ_b ist *keine* Funktion, aber Physiker*innen ignorieren das oft und schreiben

$$\varphi(b) = \int \mathrm{d}x\, \varphi(x)\delta(x-b). \tag{7}$$

Die Delta-Distribution lässt sich auch als Grenzwert mit Hilfe von Funktionenfolgen darstellen. Zwei solcher Funktionenscharen sind gegeben durch

$$f_\epsilon(x) := \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{x^2+\epsilon^2} \qquad g_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |x| \le \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}. \tag{8}$$

(a) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f_\epsilon(x)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, g_\epsilon(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \mathrm{d}x\, f_\epsilon(x)\varphi(x) = \varphi(0) \tag{9}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \mathrm{d}x\, g_\epsilon(x)\varphi(x) = \varphi(0) \tag{10}$$

oder mit anderen Worten: f_ϵ und g_ϵ sind Darstellungen der Delta-Distribution.

(c) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}^*$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{11}$$

Eine weitere wichtige Funktion ist die Heaviside-Sprungfunktion θ. Sie ist definiert als

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{12}$$

(d) Fassen Sie die Heaviside-Funktion als Distribution auf:

$$\vartheta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; \quad \varphi \mapsto \vartheta[\varphi] := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \theta(x)\varphi(x). \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{D}\vartheta = \delta$, dabei ist die distributionelle Ableitung definiert als:

$$\mathrm{D}\vartheta[\varphi] = -\vartheta[\varphi']. \tag{14}$$

Bitte wenden! →

12. **Standardabweichung und Unschärferelation (10 Punkte)**

Gegeben sei die folgende eindimensionale Wellenfunktion $\Psi_1(x,t)$

$$\Psi_1(x,t) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{15}$$

wobei A, λ und ω reelle Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie A so, dass die Wellenfunktion Ψ_1 normiert ist. D.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\Psi_1^*(x,t)\Psi_1(x,t) = 1 \tag{16}$$

(b) Der Erwartungswert einer Größe A bezüglich einer Funktion $\Psi(\vec{x})$ bzw. $\hat{\Psi}(\vec{k})$ ist gegeben durch

$$\langle A\rangle_\Psi = \frac{\int \mathrm{d}^3x\,\Psi^\star(\vec{x})\,A(\vec{x})\,\Psi(\vec{x})}{\int \mathrm{d}^3x\,\Psi^\star(\vec{x})\,\Psi(\vec{x})} \quad \text{bzw.} \quad \langle A\rangle_{\hat{\Psi}} = \frac{\int \mathrm{d}^3k\,\hat{\Psi}^\star(\vec{k})\,A(\vec{k})\,\hat{\Psi}(\vec{k})}{\int \mathrm{d}^3k\,\hat{\Psi}^\star(\vec{k})\,\hat{\Psi}(\vec{k})}\,. \tag{17}$$

Berechnen Sie für die gegebene Wellenfunktion Ψ_1 und $t=0$ die Erwartungswerte $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ sowie $\langle k\rangle$ und $\langle k^2\rangle$.
*H*inweis: Für die Erwartungswerte von $\langle k\rangle$ und $\langle k^2\rangle$ bietet es sich an, die Fouriertransformierte von $\Psi_1(x,0)$ zu benutzen.
Sie dürfen folgendes Integral benutzen: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$.

(c) Die Standardabweichung des Ortes x bzw. Wellenvektors k ist definiert als

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \tag{18}$$

$$\Delta k = \sqrt{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}\,. \tag{19}$$

Berechnen Sie mit ihren bisherigen Ergebnissen für Ψ_1 die Standardabweichungen Δx und Δk sowie $\Delta x\cdot\Delta k$