Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

3. Übungsblatt — Abgabe: 10. November 2020 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

7. Bergpfad mit Lagrange-Methode (4 Punkte)

Wir kehren noch einmal zu Aufgabe 6 von Blatt 2 zurück:
Das Höhenprofil eines Berges sei durch die Funktion

$$h(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-(x^2+y^2)} \tag{1}$$

gegeben. Die x-Achse möge auf der Erdoberfläche nach Osten und die y-Achse nach Norden zeigen. Die Erdoberfläche wird in der Umgebung des Berges als lokal eben angenommen. Über den Berg führt ein Pfad, für dessen Projektion in die x-y-Ebene gilt

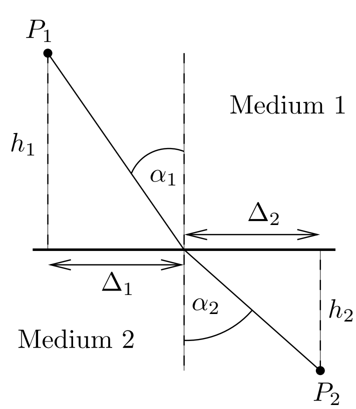
$$y = x + \frac{1}{4} \quad . \tag{2}$$

Wo befinden sich der höchste und tiefste Punkt des Pfades? Lösen Sie diese Extremwertaufgabe durch Anwenden der Lagrange-Methode.

8. Fermatsches Prinzip (7 Punkte)

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass sich ein Lichtstrahl zwischen zwei Raumpunkten stets so bewegt, dass die Laufzeit minimal wird. Aus diesem Prinzip soll das Snelliussche Brechungsgesetz hergeleitet werden. Zur Herleitung des Brechungsgesetzes betrachte man untenstehende Skizze. Ein Lichtstrahl tritt vom Medium 1 mit Brechungsindex n_1 in das Medium 2 mit Brechungsindex n_2 ein. Gesucht ist der schnellste Weg vom Punkt P_1 zum Punkt P_2. Bestimmen Sie dazu die Zeit, die das Licht benötigt als Funktion von Δ_1 und Δ_2. Bestimmen Sie dann das Minimum dieser Funktion unter der Nebenbedingung $\Delta_1 + \Delta_2 = \text{const.}$ Wenden Sie hierfür die Lagrange-Methode an. Leiten Sie aus dem Ergebnis das Snelliussche Brechungsgesetz ab:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \tag{3}$$



Hinweis: Die Lichtgeschwindigkeit c_i in einem Medium i mit Brechungszahl n_i ist durch $c_i = c/n_i$ gegeben, wobei c die Vakuumslichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Bitte wenden ⟶

9. **Extremwertaufgabe mit zwei Nebenbedingungen** **(9 Punkte)**

Wir betrachten ein gerades Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche und dem gegebenen Volumen V. Bestimmen Sie mithilfe der Lagrange-Methode, in welchem Verhältnis zueinander die Prismakanten gewählt werden müssen, damit die Oberfläche minimal wird. Geben Sie zudem für dieses Prisma das Volumen und die Oberfläche in Abhängigkeit von der Kathete a an.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks durch $A = \frac{ab}{2}$ gegeben ist, wobei a und b die beiden Katheten sind. Wählen Sie die Kathete a als die Längen-Grundeinheit. Beziehen Sie die zweite Kathete b, die Hypothenuse c und die Höhe h des Prismas auf diese Grundeinheit. Beziehen Sie analog die Oberfläche auf a^2 und das Volumen auf a^3.