Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Erik Wagner
Alexander Schwenke

Quantenmechanik WS 2020/21

1. Übungsblatt

Abgabe: Di, 3.11.2020 bis 09:45 Uhr per Email

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/lehrveranstaltungen/wintersemester-2020/21/quantenmechanik`.
Aufgaben mit **Δ** müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.
Bitten beachten Sie den geänderten Link zur Vorlesung (siehe Stud.IP)!

5. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.
Beschreiben Sie in kurzen Worten.

(a) Was ist die Ultraviolettkatastrophe und wie wurde sie gelöst?

(b) Wodurch entsteht die sogenannte Röntgen-Kante?

(c) Was ist eine ebene Welle?

Δ 6. **Dreidimensionale Wellengleichung (10 Punkte)**

Die Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{r},t) = c^2\,\Delta\Psi(\vec{r},t) \tag{1}$$

können als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\,\hat{\Psi}(\vec{k},t)\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,. \tag{2}$$

(a) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $\hat{\Psi}(\vec{k},t)$ für festes $\vec{k}$?
Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.

(b) Schreiben Sie die Lösung für $\Psi(\vec{r},t)$ aus Teil (a) als Funktion von $\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega(\vec{k})t$.
Welche Beziehung besteht zwischen $\omega(\vec{k})$ und $\vec{k}$?

(c) Als Anfangsbedingung ist ein Gaußsches Wellenpaket gegeben

$$\Psi\left(\vec{r} = \begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, t=0\right) = \Psi_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2/2}\,, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t}(\vec{r},0) = 0\,. \tag{3}$$

Geben Sie die zugehörige Lösung $\Psi(\vec{r},t)$ der dreidimensionalen Wellengleichung sowohl als Fourier-Integral sowie als explizite Funktion von $\vec{r}$ und t an.

Bitte wenden! →

7. **Plancks Strahlungsformel (5 Punkte)**

Um 1900 gab es für die Dichte $\rho(\omega, T)$ der Strahlung mit Frequenz ω eines schwarzen Körpers mit Temperatur T verschiedene Formeln. Das Gesetz von *Rayleigh-Jeans*

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3} \tag{4}$$

basiert auf klassischen Betrachtungen und funktioniert gut bei hohen Temperaturen ($\hbar\omega \ll kT$). Bei niedrigen Temperaturen hingegen gilt die *Wien*-Formel

$$\rho(\omega, T) = C_1 \omega^3 T \mathrm{e}^{-C_2 \frac{\omega}{T}} \tag{5}$$

mit den Strahlungskonstanten C_1 und C_2, die sich aus Dimensionsbetrachtungen ergibt.
Max Planck gab mit seiner Interpolationsformel zwischen diesen beiden Gesetzen einen wichtigen Anstoß für die Entwicklung der Quantenmechanik. Dies wird in *Einstein*s Theorie der Übergänge evident.
Wir betrachten hier zwei Zustände E_1, E_2 eines Systems mit diskreten Energieniveaus, wobei wir $E_2 > E_1$ annehmen. Das System kann von dem höheren Zustand in den niedrigeren übergehen, in dem es ein Lichtquant $\hbar\omega = E_2 - E_1$ emittiert. Die Wahrscheinlichkeit einer *spontanen* Emission eines solchen Quants pro Zeit bezeichnen wir mit

$$\mathrm{d}W_e' = a_2^1 \mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

Ein äußeres Strahlungsfeld der Dichte $\rho(\omega, T)$ kann zudem Übergänge $2 \to 1$ induzieren. Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit der induzierten Emission mit $\mathrm{d}W_e''$, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeit der Emission

$$\mathrm{d}W_e = \mathrm{d}W_e' + \mathrm{d}W_e''\,. \tag{7}$$

Schließlich kann ein Lichtquant mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}W_a$ bei einem Übergang $1 \to 2$ absorbiert werden.
Einstein nahm nun an, daß die Übergangsraten für die durch das Strahlungsfeld induzierten Übergänge proportional zur Strahlungsdichte sind, d.h.

$$\mathrm{d}W_a = b_1^2 \rho(\omega, T)\mathrm{d}t\,, \qquad\qquad \mathrm{d}W_e'' = b_2^1 \rho(\omega, T)\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

(a) Seien n_1 und n_2 die Anzahl der besetzten Zustände E_1 bzw. E_2 zum Zeitpunkt t. Stellen Sie die Bedingung für Stationarität auf, d.h. dafür daß sich diese Besetzungszahlen durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld nicht mit der Zeit ändern. Drücken Sie diese Bedingung durch die Größen n_1, n_2, a_2^1, b_1^2, b_2^1 und $\rho(\omega, T)$ aus.

(b) Die Besetzungszahlen der Niveaus des Systems sind gegeben durch die klassische *Boltzmann*-Verteilung

$$n_j \propto \mathrm{e}^{-\frac{E_j}{kT}} \quad \text{mit} \quad j = 1, 2\,. \tag{9}$$

Setzen Sie dies in die Gleichgewichtsbedingung ein und leiten Sie durch Betrachtung des Grenzfalls $T \to \infty$ eine Beziehung zwischen den Koeffizienten b_1^2 und b_2^1 her.
Hinweis: Sie dürfen eingangs genannte Eigenschaften für die Asymptotik von $\rho(\omega, T)$ verwenden.

(c) Lösen Sie nun die Gleichgewichtsbedingung nach $\rho(\omega, T)$ auf und bestimmen Sie den dabei auftretenden energieabhängigen Koeffizienten durch Vergleich mit dem klassischen Grenzfall $kT \gg \hbar\omega$.

Bitte wenden! →

8. **Bohr-Sommerfeld-Quantisierung des Wasserstoffatoms (12 Punkte)**

(a) Die Hamiltionfunktion des Wasserstoffatoms lautet in kartesischen Koordinaten

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}, \quad \text{mit } r = |\vec{r}| \tag{10}$$

Stellen Sie die Hamiltionfunktion in Kugelkoordinaten dar und verwenden Sie dabei p_r, p_Θ und p_Φ als die zu Radius r, Polarwinkel Θ und Azimutwinkel Φ kanonisch konjugierten Impulse.

(b) Geben Sie einen vollständigen Satz von Erhaltungsgrößen an. Welche Interpretation haben diese Erhaltungsgrößen?
Hinweis: Verwenden Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die charakteristische Funktion W und lösen Sie diese durch den Separationsansatz $W = W_r(r) + W_\Theta(\Theta) + W_\Phi(\Phi)$. Zu jedem q_i ergibt sich dann eine Erhaltungsgröße.

(c) Sei M^2 das Quadrat des Drehimpulses, M_z dessen Projektion auf die z-Achse und E die Gesamtenergie.
Eliminieren Sie p_r, p_Θ und p_Φ zugunsten dieser Größen.
Welchen Wertebereich hat M_z relativ zu M? Welchen Bereich in r, Θ und Φ überstreichen die periodischen Bahnen?

(d) Führen Sie nun die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung für die Wirkungsvariablen J_i mit

$$J_i = \oint p_i \mathrm{d}q_i = \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i \tag{11}$$

durch, d.h. setzen Sie

$$J_\phi = mh\,, \qquad J_\theta = kh\,, \qquad J_r = n'h \tag{12}$$

Bestimmen Sie hieraus die Energieniveaus $E(n', k, m)$.
Drücken Sie die etwas üblichere Hauptquantenzahl n und die Nebenquantenzahl l durch n', k und m aus, sodass die Energie E nur von n abhängt und M nur von l.
Diskutieren Sie, welche Werte für die Quantenzahlen n, l, m zugelassen sind.
Hinweis: Folgende Integrale dürfen verwendet werden:

$$\oint \mathrm{d}x \sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{A - \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2}} = -2\pi\sqrt{C} + \frac{\pi B}{\sqrt{-A}}$$

$$\oint \mathrm{d}x \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{\sin^2 x}} = 2\pi(a - |b|)\,,$$

wobei $x_{1,2}$ jeweils die Nullstellen des Integranden sind.

(e) Skizzieren Sie die zugelassenen Werte des Drehimpuls-Vektors $\vec{M}$ in der $x - z$ Ebene für die ersten drei erlaubten Werte von M.