INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

2. Übungsblatt — Abgabe: 3. November 2020 bis 11:30 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

4. **Differentiationen der Umkehrfunktionen** **7 Punkte**

Vorbemerkung: Gegeben sei eine Funktion

$$y = f(x) \quad .$$

x sei die unabhängige Variable, y die abhängige. Für die graphische Darstellung ist es üblich die unabhängige Variable x als Abzisse nach rechts aufzutragen und die abhängige Variable y als Ordinate nach oben. Die Auflösung dieser Funktionen nach x führt auf die Umkehrfunktion f^{-1}

$$x = f^{-1}(y) \quad .$$

Der Graph dieser Umkehrfunktion ist identisch mit dem der Ausgangsfunktion, denn es wurde nur umgestellt und sonst nichts verändert. Allerdings wäre innerhalb der Umkehrfunktion die Variable y als unabhängig und x als abhängig anzusehen. Will man die Umkehrfunktion nun in der gleichen graphischen Darstellung unterbringen wie die Ausgangsfunktion, passt die Symbolik nicht zusammen, da y ursprünglich als abhängige Variable nach oben aufgetragen ist. Jetzt in der Umkehrfunktion ist y aber unabhängige Variable und sollte nach rechts aufgetragen werden. Entsprechendes gilt für x. Um die Umkehrfunktion dennoch im gleichen Graphen auftragen zu können ohne die üblichen Konventionen zu brechen, sind x und y gegeneinander auszutauschen. Man schreibt dann die Umkehrfunktion f^{-1} in der Form

$$y = f^{-1}(x) \quad .$$

Konkret zu betrachten sind nun die Umkehrfunktionen des Sinus, Cosinus und Tangens.

(a) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \sin x$ mit $-\pi/2 < x < +\pi/2$, heißt Arcussinus (arcsin) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

   i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1}.

   ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}\left(\arcsin(x)\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \cos x$ mit $0 < x < \pi$, heißt Arcuscosinus (arccos) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$$

   i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1}.

   ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}\left(\arccos(x)\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \tan x$ mit $-\pi/2 < x < +\pi/2$, heißt Arcustangens (arctan) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arctan(x)$$

Bitte wenden ⟶

i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1}.

ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$, dass gilt

$$\frac{\mathrm{d}\,(\arctan(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

5. **Satellit auf Kreisbahn** **5 Punkte**

Die Gesamtenergie eines Satelliten mit Masse m, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius ρ um ein Gravitationszentrum mit Masse M bewegt, lässt sich durch

$$U = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{mM\gamma}{\rho} \tag{1}$$

beschreiben. γ ist die Gravitationskonstante und $L = const$ bezeichnet den Betrag des Drehimpulses. Der Satellit bewegt sich allerdings nur auf dieser Kreisbahn, wenn die Gesamtenergie minimal ist.

(a) Skizzieren Sie die Energie als Funktion des Radius.

(b) Bestimmen Sie den Kreisbahnradius und die dazugehörige Gesamtenergie.

(c) Betrachten Sie einen Satelliten auf einer Kreisbahn um die Erde. Damit der Satellit nicht abstürzt, muss sein Bahnradius mindenstens der Erdradius sein. Berechnen Sie die Gesamtenergie eines 1 Tonne schweren Satelliten für diese Grenzsituation. Benutzen Sie den auf ganze Kilometer gerundeten mittleren Erdradius, die Erdmasse und den Drehimpuls $5,03 \cdot 10^{13}$ kg m^2/s.

6. **Bergpfad** **8 Punkte**

Das Höhenprofil eines Berges sei durch die Funktion

$$h(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-(x^2+y^2)} \tag{2}$$

gegeben. Die x-Achse möge auf der Erdoberfläche nach Osten und die y-Achse nach Norden zeigen. Die Erdoberfläche wird in der Umgebung des Berges als lokal eben angenommen.

(a) i. Bestimmen Sie die Position des Gipfels und der Talsohle.

ii. Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen Gipfel und Talsohle?

(b) Über den Berg führt ein Pfad, für dessen Projektion in die x-y-Ebene gilt

$$y = x + \frac{1}{4} \quad . \tag{3}$$

Wo befinden sich der höchste und tiefste Punkt des Pfades? Lösen Sie diese Extremwertaufgabe indem Sie den Pfad in das Höhenprofil einsetzen und eine reine x-Abhängigkeit erzeugen.